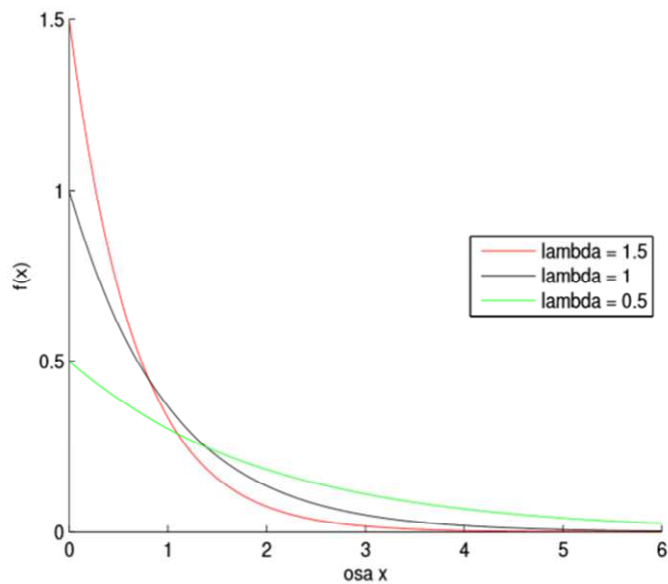


### 3. Exponenciální rozložení a jeho vlastnosti

**3.1. Definice:** Spojitá náhodná veličina  $X$  má exponenciální rozložení s parametrem  $\lambda > 0$ , jestliže hustota  $\varphi(x)$  má tvar:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} . \text{ Zkráceně píšeme } X \sim \text{Ex}(\lambda) .$$

Průběh hustoty exponenciálního rozložení pro různé hodnoty parametru  $\lambda$ :



**3.2. Poznámka:** Náhodná veličina  $X$  udává dobu čekání na příchod nějaké události, která se může dostavit každým okamžikem se stejnou šancí bez ohledu na dosud pročekanou dobu. (Jde o tzv. čekání bez paměti.) Přitom  $1/\lambda$  vyjadřuje střední hodnotu doby čekání. Lze odvodit, že:

a) distribuční funkce  $\Phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

b) funkce přežití  $\Psi(x) = 1 - \Phi(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$

c) intenzita poruchy (též riziková funkce)  $\lambda(x) = -\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} = -\frac{-\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$

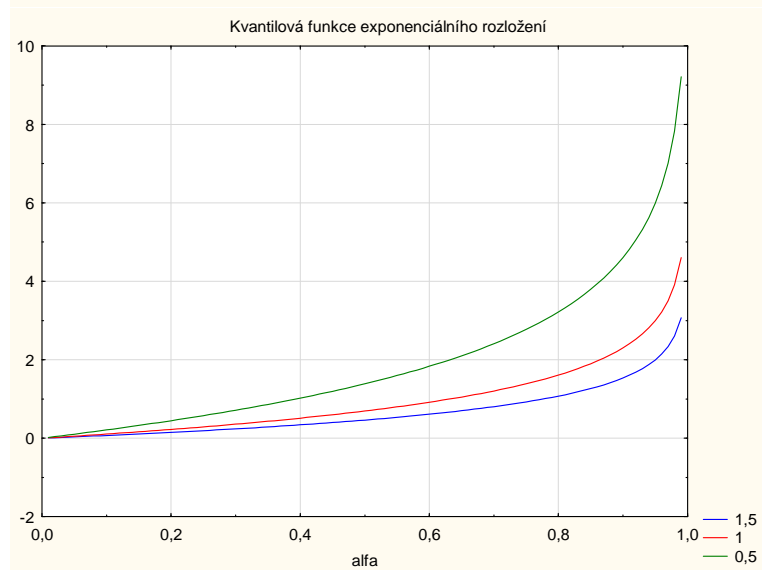
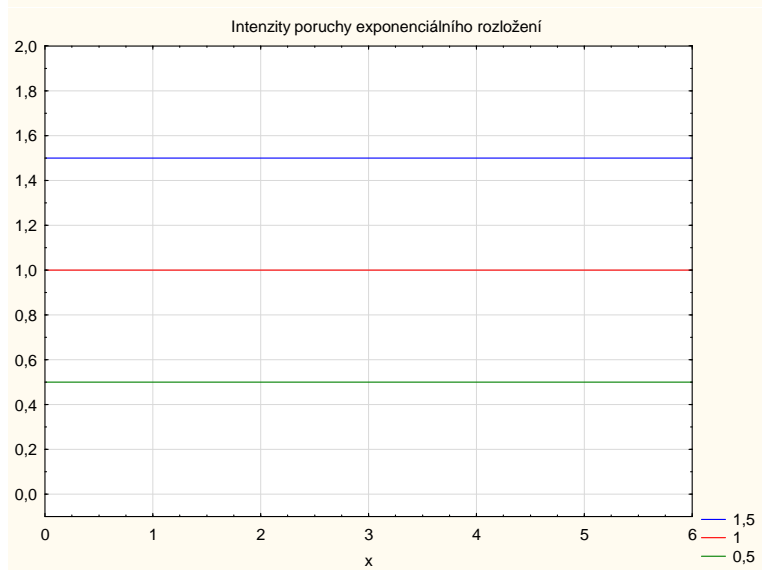
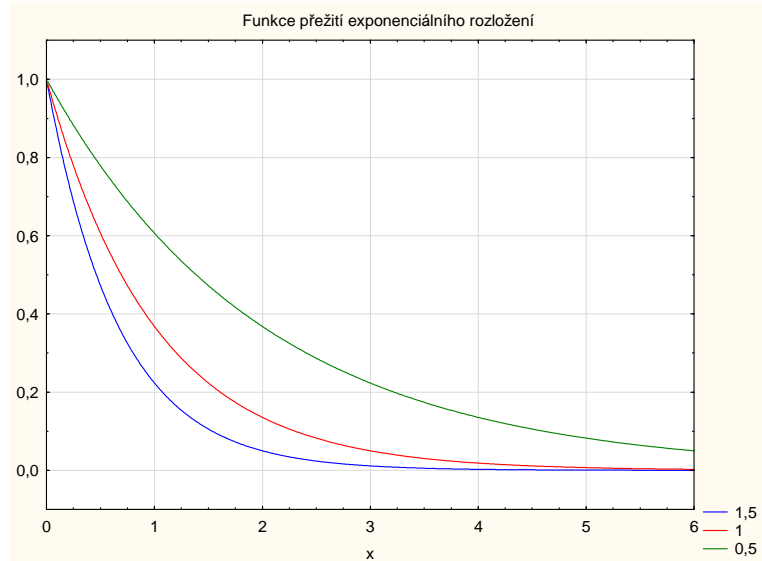
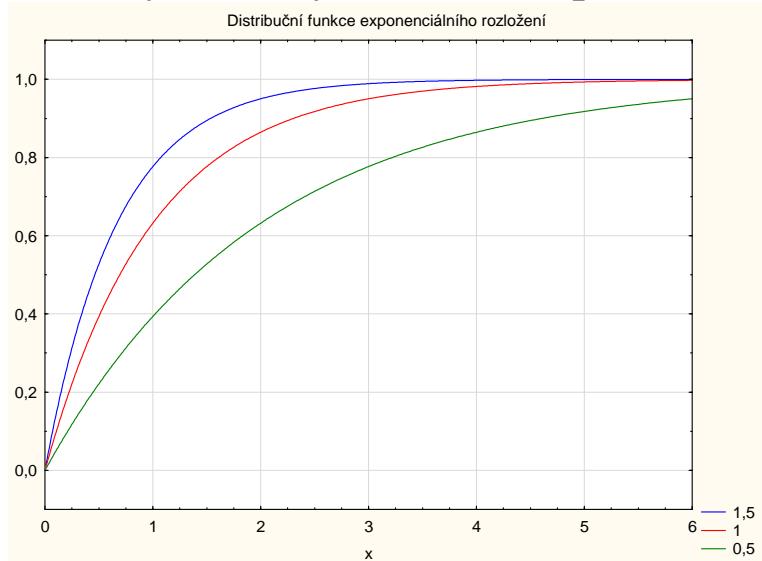
d) kvantilová funkce  $\Phi^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha), \alpha \in (0, 1)$

e) střední hodnota  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

f) rozptyl  $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

g) medián  $x_{0,50} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

# Průběhy důležitých funkcí exponenciálního rozložení



**3.3. Poznámka:** Exponenciální rozložení  $Ex(\lambda)$  je speciálním případem dvouparametrického exponenciálního rozložení  $Ex(A, \lambda)$ , kde parametr  $A > 0$  udává dobu, po kterou událost nemůže nastat. Hustota:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-A)} & \text{pro } x > A \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} .$$

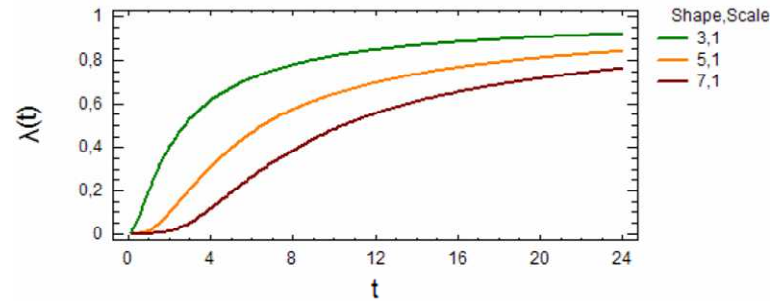
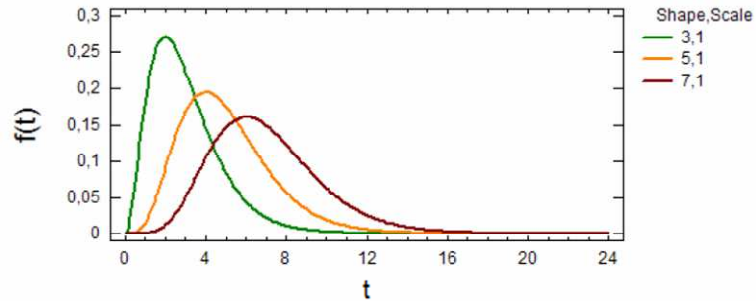
Exponenciální rozložení je speciálním případem Erlangova rozložení  $Er(k, \lambda)$  pro  $k = 1$ . Náhodná veličina  $X$  s rozložením  $Er(k, \lambda)$  vyjadřuje souhrnnou dobu čekání na  $k$ -tý výskyt události, která se může dostavit každým okamžikem se stejnou šancí bez ohledu na dosud

pročekanou dobu. Přitom  $\frac{1}{\lambda}$  je střední hodnota doby čekání od výskytu předešlé události.

$$\text{Hustota: } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} .$$

(Erlangovo rozložení je speciálním případem gama rozložení, kde první parametr je přirozené číslo.)

Grafy hustot  $Er(3, 1)$ ,  $Er(5, 1)$ ,  $Er(7, 1)$ : Grafy intenzit poruchy  $Er(3, 1)$ ,  $Er(5, 1)$ ,  $Er(7, 1)$ :



Intenzita poruchy Erlangova rozložení je rostoucí funkce, proto je toto rozložení vhodné pro modelování procesů stárnutí.

### 3.4. Příklad (Praktické využití základních vlastností exponenciálního rozložení)

Dlouhodobým pozorováním v určité prodejně bylo zjištěno, že 40 % zákazníků je obslouženo do 3 minut. Lze předpokládat, že doba čekání se řídí exponenciálním rozložením.

- Určete parametr  $\lambda$  exponenciálního rozložení.
- Vypočtete střední hodnotu doby čekání na obsluhu.
- Jaká je doba čekání, kterou polovina osob nepřekročí?
- Jaké procento zákazníků bude na obsluhu čekat déle než 6 minut?

**Řešení:**

Ad a) Je známo, že  $\Phi^{-1}(0,4) = 3$ . Přitom  $\Phi^{-1}(\alpha) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha)$ , tedy

$$\lambda = -\frac{\ln(1 - \alpha)}{\Phi^{-1}(\alpha)} = -\frac{\ln(1 - 0,4)}{3} = 0,1703$$

$$\text{Ad b) } E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,1703} = 5,87 \text{ min} = 5 \text{ min } 52\text{s}$$

$$\text{Ad c) Hledáme medián, tedy počítáme } \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0,1703} = 4,07 \text{ min} = 4 \text{ min } 4\text{s}$$

$$\text{Ad d) } P(X > 6) = \Psi(6) = e^{-\lambda \cdot 6} = e^{-0,1703 \cdot 6} = 0,36.$$

Znamená to, že 36 % zákazníků bude čekat déle než 6 minut.

**3.5. Věta:** Necht'  $X \sim \text{Ex}(\lambda)$ . Pak platí:  $\forall t > 0, \forall h > 0: P(X > t+h / X > t) = P(X > h)$

**Vysvětlení:** Tato věta vysvětluje, proč se exponenciálnímu rozložení říká rozložení bez paměti. Jestliže náhodná veličina  $X$  udává dobu do poruchy nějakého zařízení, pak pravděpodobnost, že zařízení, které pracovalo po dobu aspoň  $t$ , bude pracovat bez poruchy aspoň po dobu  $t + h$ , je stejná jako pravděpodobnost, že zařízení bude pracovat bez poruchy po dobu aspoň  $h$  – jako kdyby „zapomnělo“ již odpracovanou dobu  $t$ .

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} P(X > t+h / X > t) &= \frac{P(X > t+h \wedge X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+h)}{P(X > t)} = \frac{\Psi(t+h)}{\Psi(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = \\ &= \Psi(h) = P(X > h) \end{aligned}$$

**3.6. Příklad:** Výrobce žárovek udává, že průměrná doba životnosti jeho žárovek je 10 000 h. V rámci své propagační kampaně chce garantovat dobu  $t$ , do níž s spálí nejvýše 3 % žárovek. Stanovte tuto dobu za předpokladu, že životnost žárovky se řídí exponenciálním rozložením.

**Řešení:**  $X \sim \text{Ex}(\lambda)$ ,  $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 10000 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10000}$ . Hledáme  $t$  tak, aby platilo:

$$0,03 = P(X \leq t) = \Phi(t) = 1 - e^{-\frac{t}{10000}} \Rightarrow t = -10000 \cdot \ln 0,97 = 304,6 \text{ h}$$

**3.7. Věta:** Necht'  $X \sim \text{Ex}(\lambda)$ . Pak transformovaná náhodná veličina  $Y = \lambda X \sim \text{Ex}(1)$ .  
(Rozložení  $\text{Ex}(1)$  se nazývá standardizované exponenciální rozložení.)

**Důkaz:**  $\Phi_*(y) = P(Y \leq y) = P(\lambda X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{\lambda}\right) = \Phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{pro } y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ , tedy  $Y \sim \text{Ex}(1)$ .

**3.8. Věta:** Necht'  $X \sim \text{Rs}(0, 1)$ . Pak transformovaná náhodná veličina  $Y = -\ln X \sim \text{Ex}(1)$ .

**Důkaz:**

$$\Phi_*(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y) = P(X \geq e^{-y}) = 1 - P(X \leq e^{-y}) = 1 - \Phi(e^{-y}) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{pro } y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



**3.9. Poznámka:** Vět 3.7. a 3.8. se využívá při generování realizací náhodné veličiny  $Y \sim \text{Ex}(\lambda)$  na počítači: vygenerujeme  $n$  náhodných čísel  $x_1, \dots, x_n \sim \text{Rs}(0, 1)$  a transformujeme je vztahem  $y_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x_i), i = 1, \dots, n$ . Čísla  $y_1, \dots, y_n$  jsou realizace náhodné veličiny  $Y \sim \text{Ex}(\lambda)$ .

**3.10. Věta:** Necht'  $X_1, X_2$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny,  $X_i \sim \text{Ex}(\lambda_i), i = 1, 2$ . Pak transformovaná náhodná veličina  $Y = \min\{X_1, X_2\} \sim \text{Ex}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} \Phi_*(y) &= P(Y \leq y) = P(\min\{X_1, X_2\} \leq y) = P(X_1 \leq y \vee X_2 \leq y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) = \\ &= 1 - \Psi_1(y)\Psi_2(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 y} e^{-\lambda_2 y} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} & \text{pro } y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \end{aligned}$$

tedy  $Y \sim \text{Ex}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

**3.11. Poznámka:** Tvrzení věty 3.10. lze zobecnit i na  $n$  stochasticky nezávislých veličin  $X_1, \dots, X_n, X_i \sim \text{Ex}(\lambda_i), i = 1, \dots, n$ . Pak transformovaná náhodná veličina  $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\} \sim \text{Ex}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ .

**3.12. Věta:** Necht'  $X_1, X_2$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny,  $X_i \sim \text{Ex}(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ . Pak transformovaná náhodná veličina  $Y = X_1 + X_2 \sim \text{Er}(2, \lambda)$ .

**Důkaz:**

Podle věty o konvoluci dostáváme:

$$\begin{aligned} \varphi_*(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1)\varphi_2(y - x_1)dx_1 = |x_1 > 0, y - x_1 > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < y| = \int_0^y \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda(y-x_1)} dx_1 = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^y dx_1 = \lambda^2 y e^{-\lambda y} \text{ pro } y > 0, = 0 \text{ jinak} \end{aligned}$$

Přitom rozložení  $\text{Er}(2, \lambda)$  má hustotu

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda x)^{2-1}}{(2-1)!} \lambda e^{-\lambda x} = \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} .$$

**3.13. Poznámka:** Tvzení věty 3.12. lze zobecnit i na  $n$  stochasticky nezávislých veličin

$X_1, \dots, X_n, X_i \sim \text{Ex}(\lambda), i = 1, \dots, n$ . Pak transformovaná náhodná veličina  $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Er}(n, \lambda)$ .

**3.14. Příklad:** Zákazník prochází třemi nezávislými stanicemi obsluhy, přičemž v každé z nich se doba obsluhy řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 1 minuta. Jaká je pravděpodobnost, že celková doba obsluhy nepřesáhne 2 minuty?

**Řešení:** Označme  $X_i$  dobu obsluhy na  $i$ -té stanici,  $X_i \sim \text{Ex}(1)$ ,  $i = 1, 2, 3$  a  $Y = X_1 + X_2 + X_3$  celkovou dobu obsluhy. Podle poznámky 3.13. se celková doba obsluhy řídí rozložením  $\text{Er}(3,1)$ ,

tedy hustota  $\varphi(y) = \frac{y^2}{2} e^{-y}$  pro  $y > 0$ . Počítáme:

$$P(Y \leq 2) = \int_0^2 \frac{y^2}{2} e^{-y} dy = \dots = 1 - 5e^{-2} = 0,3233$$

Pravděpodobnost, že celková doba obsluhy nepřesáhne 2 minuty, je 0,3233.

**3.15. Věta:** Necht'  $X_1, X_2$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny,  $X_i \sim \text{Ex}(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ . Pak

$$P(X_2 > X_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

**Důkaz:**  $P(X_2 > X_1) = P((X_1, X_2) \in S)$ , kde  $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 > x_1\}$ , tedy

$$\begin{aligned} P((X_1, X_2) \in S) &= \iint_S \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_S \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^\infty \left[ \int_{x_1}^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} dx_2 \right] dx_1 = \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1} \left[ -\frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 x_2} \right]_{x_1}^\infty dx_1 = \lambda_1 \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_1} dx_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[ e^{-x_1(\lambda_1 + \lambda_2)} \right]_0^\infty = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

**3.16. Věta:** Necht'  $X \sim \text{Ex}(\lambda)$ . Pak transformovaná náhodná veličina  $Y = 2\lambda X \sim \chi^2(2)$ .

**Důkaz:** Hustota rozložení  $\chi^2(n)$  je  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ . V našem případě  $n = 2$ ,

tedy  $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ . Počítáme distribuční funkci veličiny  $Y$ :

$$\Phi_*(y) = P(Y \leq y) = P(2\lambda X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{2\lambda}\right) = \Phi\left(\frac{y}{2\lambda}\right) = 1 - e^{-\frac{y}{2}} \text{ pro } y > 0, = 0 \text{ jinak}$$

Derivováním obdržíme hustotu:

$$\varphi_*(y) = \frac{d\Phi_*(y)}{dy} = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \text{ pro } y > 0, = 0 \text{ jinak}, \text{ tedy } Y \sim \chi^2(2).$$

**3.17. Poznámka:** Tvrzení věty 3.16. lze zobecnit i na  $n$  stochasticky nezávislých veličin

$X_1, \dots, X_n, X_i \sim \text{Ex}(\lambda), i = 1, \dots, n$ . Pak transformovaná náhodná veličina  $Y = 2\lambda \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2(2n)$ .

**3.18. Věta:** Necht'  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozložení  $Ex(\lambda)$ . Označme  $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  výběrový průměr. Pak meze 100(1- $\alpha$ )% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu  $\frac{1}{\lambda}$  jsou:

$$D = \frac{2nM}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}, \quad H = \frac{2nM}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}.$$

**Důkaz:** Podle poznámky 3.17. náhodná veličina  $Y = 2\lambda nM \sim \chi^2(2n)$ . Z definice 100(1- $\alpha$ )% intervalu spolehlivosti dostáváme:

$$\begin{aligned} \forall \lambda > 0: 1 - \alpha &= P(\chi^2_{\alpha/2}(2n) < 2\lambda nM < \chi^2_{1-\alpha/2}(2n)) = P\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} < \frac{1}{2\lambda nM} < \frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right) = \\ &= P\left(\frac{2nM}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2nM}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right) \end{aligned}$$

**3.19. Příklad:** V jisté prodejně potravin bylo na základě náhodného výběru 50 zákazníků zjištěno, že průměrná doba obsluhy u pokladny je 30 s. Předpokládejme, že doba obsluhy je náhodná veličina s exponenciálním rozložením. Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu doby obsluhy.

**Řešení:**  $n = 50$ ,  $m = 30$ ,  $\alpha = 0,05$

$$d = \frac{2nm}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 30}{\chi^2_{0,975}(100)} = \frac{3000}{129,501} = 23,16$$

$$h = \frac{2nm}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 30}{\chi^2_{0,025}(100)} = \frac{3000}{74,222} = 40,42$$

Střední hodnota doby obsluhy se s pravděpodobností aspoň 0,95 nachází v intervalu 23 s až 40 s.

**3.20. Poznámka:** Pro větší rozsahy náhodných výběrů ( $n \geq 30$ ) lze pro střední hodnotu  $\frac{1}{\lambda}$  použít asymptotický 100(1- $\alpha$ )% interval spolehlivosti založený na centrální limitní větě.

Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozložení  $Ex(\lambda)$ ,  $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  je výběrový průměr. Pak

střední hodnota  $E(M) = \frac{1}{\lambda}$  a rozptyl  $D(M) = \frac{1}{n\lambda^2}$ . Standardizací výběrového průměru

dostaneme veličinu  $U = \frac{M - E(M)}{\sqrt{D(M)}} = \frac{M - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}} = \frac{(M - \frac{1}{\lambda})\sqrt{n}}{\frac{1}{\lambda}} \approx N(0,1)$ . Konvergence k rozložení

$N(0,1)$  se neporuší, když  $\frac{1}{\lambda}$  ve jmenovateli nahradíme  $M$ , tedy  $U = \frac{(M - \frac{1}{\lambda})\sqrt{n}}{M} \approx N(0,1)$ .

$\forall \lambda > 0 : 1 - \alpha \leq P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{(M - \frac{1}{\lambda})\sqrt{n}}{M} < u_{1-\alpha/2}\right) = P\left(M - \frac{M}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2} < \frac{1}{\lambda} < M + \frac{M}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$ , tedy

$$D = M - \frac{M}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, H = M + \frac{M}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}.$$



**3.21. Příklad:** Pro údaje z příkladu 3.19. spočtěte meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu doby obsluhy podle vzorů uvedených v poznámce 3.20.

**Řešení:**  $n = 50$ ,  $m = 30$ ,  $\alpha = 0,05$

$$d = m - \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 30 - \frac{30}{\sqrt{50}} 1,96 = 21,68$$

$$h = m + \frac{m}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 30 + \frac{30}{\sqrt{50}} 1,96 = 38,32$$

Střední hodnota doby obsluhy se s pravděpodobností aspoň 0,95 nachází v intervalu 22 s až 38 s.

**3.22. Poznámka:** Výhody a nevýhody exponenciálního rozložení v praxi

Výhoda: Exponenciálního rozložení má jednoduché vyjádření hustoty a jeho hustota má průběh, který dobře popisuje řadu reálných dějů.

Nevýhoda: Exponenciální rozložení závisí pouze na jediném parametru, je tedy málo flexibilní. V některých situacích, např. při modelování výše pojistného plnění, špatně modeluje interval nejnižších hodnot a také interval nejvyšších hodnot, protože hustota příliš rychle klesá k nule.