TEORIE HER

–“kostra” přednášky Libor Polák, Masarykova Univerzita Brno

1 Hry n hráčů v normální formě

1.1 Základní definice

Nechť $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ a $N = \{1, \ldots, n\}$ je množina (všech) **hráčů**;
nechť X_i je neprázdná množina (všech) **strategií** i-tého hráče, $i \in N$;
nechť $u_i : \prod_{j \in N} X_j \to \mathbb{R}$ je **výherní funkce** i-tého hráče, $i \in N$.

Uspořádanou dvojici $G = ((X_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ nazýváme **hrou n hráčů v normální formě**.

Píšeme $\widehat{i} = N \setminus \{i\},\ \breve{u}_i(x_i, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = u_i(x_1, \ldots, x_n)$ pro $i \in N$, $X_S = \prod_{i \in S} X_i,\ \widehat{S} = N \setminus S$ pro $S \subseteq N$ a stručně $X = X_N$.

Podmnožiny množiny N nazýváme **koalice** a prvky množiny X nazýváme **situace**.

Strategie $x \in X_i$ **dominuje (pro i-tého hráče)** strategii $x' \in X_i$, jestliže

$$\forall\ y \in X_{\widehat{i}} \quad \breve{u}_i(x, y) \geq \breve{u}_i(x', y) \quad \text{a} \quad \exists\ y \in X_{\widehat{i}} \quad \breve{u}_i(x, y) > \breve{u}_i(x', y)\ .$$

Strategie $\overline{x} \in X_i$ je **nedominovaná (pro i-tého hráče)**, neexistuje-li $x \in X_i$ dominující $\overline{x}$.

Strategie $x \in X_i$ se nazývá **dominantní (pro i-tého hráče)**, jestliže

$$\forall\ x' \in X_i,\ y \in X_{\widehat{i}} \quad \breve{u}_i(x, y) \geq \breve{u}_i(x', y)\ .$$

Situace $x \in X$ **dominuje podle Pareta** situaci $x' \in X$, platí-li

$$\forall\ i \in N \quad u_i(x) \geq u_i(x') \quad \text{a} \quad \exists\ i \in N \quad u_i(x) > u_i(x')\ .$$

Situace $x \in X$ se nazývá **optimální podle Pareta**, není-li dominována (podle Pareta) žádnou $x' \in X$.

Strategie $x, x' \in X_i$ se nazývají **ekvivalentní (pro i-tého hráče)**, platí-li

$$\forall\ y \in X_{\widehat{i}} \quad \breve{u}_i(x, y) = \breve{u}_i(x', y)\ .$$

Strategií $x \in X_i$ si i-tý hráč **zaručuje**

$$\inf_{y \in X_{\widehat{i}}} \breve{u}_i(x, y) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\ .$$

"Číslo"

$$h_i^- = \sup_{x \in X_i} \inf_{y \in X_{\hat{i}}} \breve{u}_i(x,y) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

nazýváme **dolní hodnotou hry (pro i-tého hráče)**. Podobně

$$h_i^+ = \inf_{y \in X_{\hat{i}}} \sup_{x \in X_i} \breve{u}_i(x,y) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

nazýváme **horní hodnotou hry (pro i-tého hráče)**.

Strategie $x \in X_i$ i-tého hráče se nazývá **opatrná**, platí-li

$$\inf_{y \in X_{\hat{i}}} \breve{u}_i(x,y) = h_i^- \ .$$

Hra se nazývá **podstatná**, existuje-li $x \in X$ tak, že

$$\forall\, i \in N \quad u_i(x) \geq h_i^- \quad \text{a} \qquad \exists\, i \in N \quad u_i(x) > h_i^- \ .$$

Situace $x \in X$ se nazývá **rovnovážná (podle Nashe)**, platí-li

$$\forall\, i \in N, y \in X_i \quad \breve{u}_i(y, x_{\hat{i}}) \leq u_i(x) \ .$$

Hra $G = (X, Y; u, v)$ dvou hráčů se nazývá **antagonistická**, platí-li

$$\forall\, x, x' \in X \times Y \quad u(x) \leq u(x') \ \Leftrightarrow \ v(x) \geq v(x')$$

a **s nulovým součtem**, je-li dokonce $v = -u$.

Obecněji: hra $G = (X_1, \ldots, X_n; u_1, \ldots, u_n)$ je **s konstantním součtem**, řekněme c, je-li

$$\forall\, x \in X \quad u_1(x) + \cdots + u_n(x) = c \ .$$

Hra je **konečná**, jsou-li množiny $X_1, \ldots, X_n$ konečné. Obvykle pak klademe

$$X_i = \{1, ..., m_i\}, \ i \in N \ .$$

Pro $n = 2$ pak ještě stručněji $X = \{1, ..., m\}, \ Y = \{1, ..., n\}$ a hovoříme o **bimaticové** hře. **Maticová** hra je bimaticová hra s nulovým součtem.

Pro konečnou hru $G = (X_1, \ldots, X_n; u_1, \ldots, u_n)$ definujeme její **pravděpodobnostní rozšíření** $G^* = (X_1^*, ..., X_n^*; \ u_1^*, ..., u_n^*)$ takto

$$X_i^* = \{x_i \in \mathbb{R}^{m_i} \mid x_{i,1}, ..., x_{i,m_i} \geq 0, \ x_{i,1} + ... + x_{i,m_i} = 1\}, \ i \in N \ ,$$

$$u_i^*(x) = \sum_{k_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=1}^{m_n} x_{1,k_1} \cdots x_{n,k_n} \cdot u_i(k_1, ..., k_n) \ , \ x \in X^* = X_1^* \times \cdots \times X_n^* \ .$$

Zobrazení $k \in X_i \mapsto k^* = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in X_i^*$, 1 na k-té pozici, je prosté a proto lze množinu X_i považovat za podmnožinu množiny X_i^* - odtud termín "rozšíření". Strategiím z X_i říkáme **čisté** a strategiím z X_i^* **smíšené**.

1.2 Několik existenčních tvrzení

Věta 1 *Nechť $i \in N$, nechť pro každé $j \in N$ je X_j kompaktní metrický prostor a nechť funkce u_i je spojitá. Pak existuje nedominovaná strategie i-tého hráče.*

Věta 2 *Za předpokladů Věty 1 je ekvivalentní:*
(i) existuje dominantní strategie i-tého hráče,
(ii) všechny nedominované strategie i-tého hráče jsou ekvivalentní,
(iii) množina všech nedominovaných strategií i-tého hráče je rovna množině všech jeho dominantních strategií.

Věta 3 *Za předpokladů Věty 1 je množina všech opatrných strategií i-tého hráče neprázdná kompaktní a protíná se s množinou všech jeho nedominovaných strategií.*

Věta 4 *Nechť G je nepodstatná hra a nechť x je situace z opatrných strategií. Pak:*
(i) $\forall\ i \in N, \quad \forall\ y \in X_{\widehat{i}} \quad u_i(x) = h_i^- \leq \breve{u}_i(x_i, y)$,
(ii) x je optimální podle Pareta,
(iii) $\forall\ S \subseteq N, \quad \forall\ y \in X_S$ není možné, aby současně
$\forall\ i \in S \quad u_i(x) \leq \breve{u}_i^S(y, x_{\widehat{S}}) \quad a \quad \exists\ i \in S \quad u_i(x) < \breve{u}_i^S(y, x_{\widehat{S}})$.
(Přitom index S nahoře značí, že uvažujeme nejprve argumenty s indexy z množiny S.)

1.3 Antagonistické hry

Používáme označení $G = (X, Y; u, v)$; platí

$$h_1^- = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y) \quad \text{a} \quad h_1^+ = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y) \ .$$

Lemma 1 *Platí $h_1^- \leq h_1^+$ a to dokonce pro libovolnou hru dvou hráčů.*

Poznámka 1 *$(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ je rovnovážná situace*

$$\Leftrightarrow \quad \forall\ (x, y) \in X \times Y \quad u(x, \overline{y}) \leq u(\overline{x}, \overline{y}) \leq u(\overline{x}, y)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\ (x, y) \in X \times Y \quad u(x, \overline{y}) \leq u(\overline{x}, y) \ .$$

Věta 1 *Nechť $(\overline{x}, \overline{y})$, $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ jsou rovnovážné situace. Pak rovněž $(\overline{x}, \widetilde{y})$, $(\widetilde{x}, \overline{y})$ jsou rovnovážné situace a platí $u(\overline{x}, \overline{y}) = u(\widetilde{x}, \widetilde{y})$.*

Strategie $\overline{x} \in X$ se nazývá **optimální (pro prvního hráče)**, existuje-li $\overline{y} \in Y$ tak, že $(\overline{x}, \overline{y})$ je rovnovážná situace. Podobně pro druhého hráče.

Věta 2 *Nechť $(\overline{x}, \overline{y})$ je rovnovážná situace. Pak*

$$h_1^- = h_1^+ = u(\overline{x}, \overline{y}) = \inf_{y \in Y} u(\overline{x}, y) = \sup_{x \in X} u(x, \overline{y}) \ .$$

Zejména tedy $\overline{x}$ maximalizuje $\inf_{y \in Y} u(x, y)$ a $\overline{y}$ minimalizuje $\sup_{x \in X} u(x, y)$.

(Obecně pro $(x, y) \in X \times Y$ máme $\inf_{y \in Y} u(x, y) \leq h_1^- \leq h_1^+ \leq \sup_{x \in X} u(x, y)$.)

Věta 3 *Nechť* $(\overline{x},\overline{y}) \in X \times Y$ *a nechť*

$$\inf_{y\in Y} \ u(\overline{x},y) \geq \sup_{x\in X} \ u(x,\overline{y}) \ .$$

Pak $(\overline{x},\overline{y})$ *je rovnovážná situace.*

Lemma 2 *Za předpokladu existence rovnovážné situace*
$\overline{y}$ *minimalizuje* $\sup_{x\in X} \ u(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{y}$ *maximalizuje* $\inf_{x\in X} \ v(x,y)$.
Zejména, má-li hra rovnovážnou situaci, je pro každého z hráčů "optimální" = "opatrná".

1.4 Maticové hry

Maticová hra je plně zadána maticí $A = (a_{ij})$ typu m/n; máme
$X = \{1, ..., m\}, \ Y = \{1, ..., n\}, \ u(i,j) = a_{ij}, \ v = -u.$
Jejím pstním rozšířením je hra $(X^*, Y^*; u^*)$ s nulovým součtem, kde

$$X^* = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1, \ldots, x_m \geq 0, \ x_1 + ... + x_m = 1\},$$

$$Y^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_1, \ldots, y_n \geq 0, \ y_1 + ... + y_n = 1\},$$
$$u^*(x,y) = xAy^\top .$$

Lemma 1 $(\overline{x},\overline{y}) \in X^* \times Y^*$ *je rovnovážnou situací pstního rozšíření hry s maticí* $A \ \Leftrightarrow$
$\forall \ (i,j) \in X \times Y \quad i^* A\overline{y}^\top \leq \ \overline{x}Aj^{*\top}$.

Věta (von Neumann) *Pstní rozšíření libovolné maticové hry má rovnovážnou situaci.*

V (konstruktivním) důkazu používáme následující vzájemně duální úlohy lineárního programování:

$$\max\{v \mid A^\top x^\top \geq vJ_n, \ \sum x_i = 1, \ x \geq 0\} \tag{1}$$

$$\min\{w \mid Ay^\top \leq wJ_m, \ \sum y_j = 1, \ y \geq 0\} \tag{2}$$

kde J_k je sloupcový vektor z k jedniček.
Pro výpočet jsou vhodnější úlohy:

$$\min\{t_1 + ... + t_m \mid A^\top t^\top \geq J_n, \ t \geq 0\} \tag{1'}$$

$$\max\{u_1 + ... + u_n \mid Au^\top \leq J_m, \ u \geq 0\} \qquad (2').$$

Za (neomezujícího) předpokladu, že (1) má přípustné řešení s $v > 0$, jsou zobrazení

$$\alpha : (x,v) \mapsto x/v \quad \text{a} \quad \beta : t \mapsto (t,1)/(t_1 + ... + t_m)$$

vzájemně inverzními bijekcemi mezi množinou všech přípustných řešení úlohy (1) s kladným v a množinou všech přípustných řešení úlohy (1') převádějící množinu všech řešení (1) na množinu všech řešení (1') a zpět. Zcela analogická zobrazení fungují mezi množinami všech přípustných řešení (2) a (2') a mezi množinami všech řešení (2) a (2').

Konečně úlohu (2'), která je ze všech čtyř úloh lineárního programování v nejvhodnějším tvaru, lze řešit tak, abychom současně dostali i řešení úlohy (1').

1.5 Konečné hry

Definici pstního rozšíření konečné hry máme na konci sekce 1.1.

Věta (Nash) *Pstní rozšíření libovolné konečné hry n-hráčů má rovnovážnou situaci.*

1.6 Hry na čtverci

Jedná se o hry 2 hráčů s nulovým součtem s množinami strategií $X = Y = [0,1]$.

Věta *Nechť $u : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ je spojitá, pro libovolné pevné $y \in [0,1]$ je funkce $u(-,y)$ konkávní a pro libovolné pevné $x \in [0,1]$ je funkce $u(x,-)$ konvexní. Pak existuje rovnovážná situace.*

Smíšenými strategiemi jsou zde tzv. **distribuční** funkce na intervalu $[0,1]$, tj. funkce $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, které jsou zprava spojité, neklesající, nezáporné splňující $F(1) = 1$. Nechť $X^* = Y^*$ jsou rovny množině všech takovýchto funkcí. Interpretace: $F(x)$ je pst, s níž hráč vybírá strategii z intervalu $[0,x]$. Klademe

$$u^*(F,G) = \int_{[0,1]\times[0,1]} u(x,y)dF(x)dG(y) \ .$$

Věta *Libovolná hra na čtverci se spojitou výherní funkcí má rovnovážnou situaci ve smíšených strategiích.*

2 Teorie užitečnosti

Nechť $\mathcal{U}$ je (neprázdná) množina **událostí**. Jediným požadavkem je uzavřenost na tzv. **loterie**, kterými rozumíme formální konvexní kombinace.

Interpretace: Množina $\mathcal{U}$ se týká dané osoby v daném okamžiku a loterie $r_1A_1 + ... + r_nA_n$ ($r_1,\dots,r_n \in \mathbb{R},\ r_1,\dots,r_n \geq 0,\ r_1+...+r_n = 1,\ A_1,\dots,A_n \in \mathcal{U}$) je událost spočívající v tom, že s pstí r_i nastane událost $A_i,\ i = 1,...,n$.

Na množině $\mathcal{U}$ uvažujeme relace $\prec$, $\parallel$ a relaci $\succ$ inverzní k relaci $\prec$. $A \prec B$ interpretujeme jako **dávat přednost** události B před událostí A a $A \parallel B$ interpretujeme jako žádné z událostí A,B nedávat přednost před druhou. Předpokládáme, že jsou splněny následující axiomy:

U1 $\forall\, A,B \in \mathcal{U}$ nastává právě jedna z možností: $A \prec B,\ A \parallel B,\ A \succ B$;
U2 $\parallel$ je relací ekvivalence;
U3 $\prec$ je tranzitivní relace;
U4 $A \prec B \parallel C \Rightarrow A \prec C$ a $A \parallel B \prec C \Rightarrow A \prec C$;
U5 $1 \cdot A + 0 \cdot B = A$;
U6 $r_1A_1 + ... + r_nA_n = r_{\sigma(1)}A_{\sigma(1)} + ... + r_{\sigma(n)}A_{\sigma(n)}$
pro libovolnou permutaci σ množiny $\{1,...,n\}$;
U7 $rA + (1-r)(sB + (1-s)C) = rA + (1-r)sB + (1-r)(1-s)C$;
U8 $rA + (1-r)A = A$;

U9 $A \parallel C,\ r \in [0,1], B \in \mathcal{U} \ \Rightarrow\ rA + (1-r)B \ \parallel\ rC + (1-r)B$;
U10 $A \prec C,\ r > 0, B \in \mathcal{U} \ \Rightarrow\ rA + (1-r)B \ \prec\ rC + (1-r)B$;
U11 $A \prec B \prec C \ \Rightarrow\ \exists\, r \in [0,1]$ tak, že $rA + (1-r)C \ \parallel\ B$
– **spojitost** - nejdiskutovatelnější axiom.

Věta *Existuje $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tak, že*

$$\forall\ A, B \in \mathcal{U},\ r \in [0,1] \text{ platí } \ u(A) < u(B) \ \Leftrightarrow\ A \prec B \ ,$$

$$u(rA + (1-r)B) = r \cdot u(A) + (1-r) \cdot u(B) \ .$$

Je-li v jiné takové, existuje $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ tak, že $\quad \forall\ A \in \mathcal{U} \quad v(A) = \alpha \cdot u(A) + \beta$.

Zobrazení u z minulé věty nazýváme **funkcí užitečnosti** (daného hráče v daném okamžiku).

Nyní můžeme upřesnit interpretaci definice hry v normální formě. Jednotliví hráči volí (nezávisle) své strategie. Tak vzniká situace x, která je pro i-tého hráče událostí s užitečností $u_i(x)$.

3 Úlohy o dohodě

3.1 Nashova teorie

Úloha o dohodě je uspořádaná trojice (S, u^*, v^*), kde $S \subseteq \mathbb{R}^2$ je konvexní a kompaktní množina a $(u^*, v^*) \in S$.

Interpretace: V daném okamžiku může dvojice hráčů po vzájemné dohodě volit událost z množiny $\mathcal{U}$. Nechť u a v jsou jejich funkce užitečnosti. Klademe $S = \{(u(A), v(A)) \mid A \in \mathcal{U}\}$. ($S$ je konvexní, neboť $\mathcal{U}$ je uzavřená na loterie.) Dále: u^* je užitečnost, kterou si dokáže zaručit první hráč bez spolupráce s druhým hráčem; podobně v^*.

Nechť $\mathcal{D}$ je množina všech úloh o dohodě. Pro funkci $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ formulujme axiomy:
$\forall\ (S, u^*, v^*) \in \mathcal{D},\ T \subseteq \mathbb{R}^2$ konvexní a kompaktní
N1 $\varphi(S, u^*, v^*) \geq (u^*, v^*)$;
N2 $\varphi(S, u^*, v^*) \in S$;
N3 $(u, v) \in S,\ (u, v) \geq \varphi(S, u^*, v^*) \ \Rightarrow\ (u, v) = \varphi(S, u^*, v^*)$;
N4 $\varphi(S, u^*, v^*) \in T \subseteq S,\ (u^*, v^*) \in T \ \Rightarrow\ \varphi(T, u^*, v^*) = \varphi(S, u^*, v^*)$;
N5 $\forall\ \xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tvaru $(u, v) \mapsto (\alpha u + \beta, \gamma v + \delta)$, kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R},\ \alpha, \gamma > 0$,
platí $\varphi(\xi(S), \xi(u^*, v^*)) = \xi(\varphi(S, u^*, v^*))$;
N6 S symetrická podle osy $v = u,\ u^* = v^* \ \Rightarrow\ \varphi(S, u^*, v^*)$ leží na přímce $v = u$;
N7 $(u^*, v^*) \in T \subseteq S \ \Rightarrow\ \varphi(T, u^*, v^*) \leq \varphi(S, u^*, v^*)$.

Poznámka *Neexistuje funkce $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ splňující axiomy N1 - N7.*

Věta (Nash) *Existuje, a to jediná, funkce $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ splňující axiomy N1 - N6.*

Pro danou úlohu (S, u^*, v^*) nastane právě jedna z možností
(i) existuje $(u, v) \in S,\ u > u^*, v > v^*$;
(ii) neplatí (i), ale existuje $u > u^*$ tak, že $(u, v^*) \in S$;

(iii) neplatí (i), ale existuje $v > v^*$ tak, že $(u^*, v) \in S$;
(iv) neplatí žádná z podmínek (i)–(iii).

Je zřejmé, jak vypadá $\varphi(S, u^*, v^*)$ v případech (ii)–(iv). V případě (i) je $\varphi(S, u^*, v^*)$ bod maximalizující funkci $(u - u^*) \cdot (v - v^*)$ na množině $\{(u, v) \in S \mid\ u \geq u^*,\ v \geq v^*\}$.

Úlohy o dohodě přirozeně vznikají z bimaticových her takto: Mějme bimaticovou hru s maticemi A a B typu m/n. Množina

$$\{(xAy^\top, xBy^\top) \mid (x, y) \in X^* \times Y^*\}$$

nemusí být konvexní; její konvexní obal je roven množině

$$S' = \mathrm{conv}\{(a_{i,j}, b_{i,j}) \mid (i, j) \in X \times Y\} \ .$$

Klademe

$$S = \mathrm{conv}(\{(a_{i,j}, b_{i,j}) \mid (i, j) \in X \times Y\} \cup \{(u^*, v^*)\}) \ .$$

Přitom $\quad u^* = \sup_{x \in X^*} \inf_{y \in Y^*} xAy^\top, \quad v^* = \sup_{y \in Y^*} \inf_{x \in X^*} xBy^\top.$

3.2 Vyhrožovací strategie pro bimaticové hry

Uvažujeme hru

$$G = (X^*, Y^*;\ (u, v) : (x, y) \mapsto \varphi(S, xAy^\top, xBy^\top)) \ ,$$

kde

$$S = \mathrm{conv}\{(a_{ij}, b_{ij}) \mid (i, j) \in X \times Y\} \ .$$

Strategiím této hry říkáme **vyhrožovací** strategie.

Věta *Výše uvedená hra G je antagonistická a má rovnovážnou situaci.*

4 Hry ve tvaru charakteristické funkce

4.1 Základní definice

Tak jako v první části, nechť $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ a $N = \{1, \ldots, n\}$ je množina (všech) **hráčů**, nechť 2^N značí množinu všech podmnožin množiny N - její prvky nazýváme **koalice**. **Hra ve tvaru charakteristické funkce** je zobrazení $v : 2^N \to \mathbb{R}$ splňující (i) $v(\emptyset) = 0$ – **personálnost** (ii) pro libovolná $S, T \subseteq N$ taková, že $S \cap T = \emptyset$ platí $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ – **superaditivita**.

Číslo $v(S)$ nazýváme **výhrou** koalice S.

Takovéto hry vznikají přirozeně z her v normální formě, položíme-li

$$v(S) = \sup_{x \in X_S} \inf_{y \in X_{\widehat{S}}} \sum_{i \in S} \breve{u}_i^S(x, y) \ .$$

Rozdělením hry v nazýváme libovolné $x \in \mathbb{R}^n$ splňující (i) $x_1 + \ldots + x_n = v(N)$; (ii) $\forall\ i \in N\ x_i \geq v(\{i\})$.

Množinu všech rozdělení hry v značíme $E(v)$.

Pokud se všichni hráči "domluví", pak vzhledem k superaditivitě lze očekávat, že vytvoří jedinou koalici N a o $v(N)$ se budou "dělit" podle nějakého rozdělení.

Ze superaditivity plyne, že $\sum_{i\in N} v(\{i\}) \le v(N)$. Hra se nazývá **podstatná**, je-li zde ostrá nerovnost.

Nechť $\emptyset \ne S \subseteq N$, $x, y \in E(v)$. Rozdělení x **dominuje pro koalici** S rozdělení y, píšeme $x \succ_S y$, platí-li (i) $\forall\, i \in S \quad x_i > y_i$; (ii) $\sum_{i\in S} x_i \le v(S)$.
Rozdělení x **dominuje** rozdělení y, píšeme $x \succ y$, existuje-li $\emptyset \ne S \subseteq N$ tak, že $x \succ_S y$.

Množinu všech nedominovaných rozdělení nazýváme **jádrem** a značíme ji $C(v)$.

Hry u, v (obě n hráčů) se nazývají **izomorfní**, existuje-li bijekce
$f : E(u) \to E(v)$ taková, že

$$\forall\, x, y \in E(u),\ \emptyset \ne S \subseteq N \quad x \succ_S y \ \Leftrightarrow\ f(x) \succ_S f(y)$$

a nazývají se **ekvivalentní**, existují-li

$$r > 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ tak, že } \forall\, S \subseteq N \quad v(S) = r \cdot u(S) + \sum_{i\in S} \alpha_i\ .$$

Lemma *Libovolné dvě ekvivalentní hry jsou izomorfní.*

Hra v je v $(0,1)$**-redukované formě**, platí-li (i) $\forall\, i \in N\ v(\{i\}) = 0$ a (ii) $v(N) = 1$.

Lemma *Libovolná podstatná hra je ekvivalentní, a to právě jedné, hře v* $(0,1)$*-redukované formě.*

Věta *Pro libovolnou hru* v *platí*

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ \forall\, S \subseteq N \ \sum_{i\in S} x_i \ge v(S),\ \sum_{i\in N} x_i = v(N)\}.$$

$V \subseteq E(v)$ se nazývá **NM-řešení** (von Neumann & Morgenstern) hry v, platí-li (i) $x, y \in V \ \Rightarrow\ x \not\succ y$; (ii) $x \in E(v) \setminus V \ \Rightarrow\ \exists\, y \in V\ x \prec y$.

Interpretace: NM-řešení V je norma chování dané sociální skupiny (množiny N). Při odchýlení se se najde koalice nutící danou normu dodržet. Které rozdělení z V se ale zvolí ? To záleží na kooperačních schopnostech jednotlivých hráčů.

Hra v je **prostá**, je-li $\forall\, S \subseteq N\ v(S) \in \{0,1\}$ a **symetrická**, je-li každé číslo $v(S)$ dáno pouze počtem prvků množiny S.

4.2 Ekonomické aplikace

Pomocí netriviálního použití duality lze dokázat, že následující hry mají neprázdné jádro.

1. Přiřazovací hra.

Nechť $M = \{1, \ldots, m\}$ je množina *prodejců* a $M' = \{m+1, \ldots, 2m\}$ je množina *kupců*, nechť $N = M \cup M'$ (úloha s různým počtem kupců a prodejců se řeší analogicky). Hráč

$i \in M$ vlastní dům, který si hodnotí na a_i, hráč $m+j \in M'$ chce koupit některý z domů, přitom i-tý hodnotí na b_{ij}. Nechť

$$c_{ij} = v(\{i, m+j\}) = \begin{cases} b_{ij} - a_i & \text{pro } b_{ij} \geq a_i \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} .$$

Pro $S \subseteq M$ nebo $S \subseteq M'$ máme $v(S) = 0$. Pro $|S \cap M| \geq |S \cap M'| > 0$ máme

$$v(S) = \max \left\{ \sum_{i \in S \cap M} c_{i,m+\alpha(i)} \mid \alpha : S \cap M \to S \cap M',\ \alpha \text{ prosté} \right\} .$$

2. Produkční hra.

Nechť $N = \{1, \ldots, n\}$ a nechť $i \in N$ má

$$b_{i1} \text{ jednotek zdroje } c_1, \ \ldots \ , b_{iq} \text{ jednotek zdroje } c_q \ .$$

Zdroje jsou bezcenné. Jednotka zboží G_l vyžaduje

$$a_{1l} \text{ jednotek zdroje } c_1, \ \ldots \ , a_{ql} \text{ jednotek zdroje } c_q \ .$$

a může být prodána za p_l, $l = 1, \ldots, m$.

Nechť koalice $S \subseteq N$ bude vyrábět x_l jednotek zboží G_l, $l = 1, \ldots, m$ a nechť

$$v(S) = \max\{ \sum_{l=1}^{m} p_l x_l \mid \text{pro } k = 1, \ldots, q \text{ platí } a_{k1}x_1 + \cdots + a_{km}x_m \leq \sum_{i \in S} b_{ik} \ \}.$$

4.3 Shapleyho vektor

Nechť n je pevné přirozené číslo. Nechť $\mathcal{V}$ je množina všech her n-hráčů ve tvaru charakteristické funkce. Pro $u, v \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ a permutaci π množiny $N = \{1, \ldots, n\}$ definujeme $u+v$, αu, $\pi u \in \mathcal{V}$ vztahy: pro $S \subseteq N$ nechť $(u+v)(S) = u(S)+v(S)$, $(\alpha u)(S) = \alpha u(S)$, $(\pi u)(S) = u(\pi^{-1}S)$.

Hráč i je **podstatný**, existuje-li $i \notin S \subseteq N$ tak, že $v(S \cup \{i\}) > v(S)+v(\{i\})$. V opačném případě hovoříme o **balvanu**.

Formulujme několik axiomů na funkci $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$: (píšeme $v \mapsto (\varphi_1[v], \ldots, \varphi_n[v])$)

S1 $\varphi_i[u+v] = \varphi_i[u] + \varphi_i[v]$;
S2 $\varphi_i[\alpha u] = \alpha \cdot \varphi_i[u]$;
S3 $\varphi_i[\pi u] = \varphi_{\pi^{-1}i}[u]$;
S4 pro libovolnou množinu S obsahující všechny podstatné hráče máme $\sum_{i \in S} \varphi_i[u] = v(S)$.

Věta (Shapley) *Existuje, a to jediná, funkce $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ splňující axiomy S1–S4. Ta je tvaru*

$$\varphi_i[v] = \sum_{i \in T \subseteq N} \frac{(|T|-1)! \cdot (n-|T|)!}{n!} \cdot (v(T) - v(T \setminus \{i\})) \ .$$

5 Social Choice

5.1 Arrowova věta

Nechť $N = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 2$, je množina **agentů** a nechť $A = \{1, \ldots, m\}$, $m \geq 2$, je množina **alternativ**. Nechť S_m značí množinu všech permutací množiny A. Její prvky budeme reprezentovat ostrými lineárními uspořádáními množiny A. Libovolné zobrazení $p : N \to S_m$ nazýváme **preferenčním schématem**. Množinu všech takovýchto zobrazení značme stručně $\mathcal{P}$. Konečně zobrazení $d : \mathcal{P} \to S_m$ se nazývá **funkce sociálního rozhodování**, stručně (SDF), platí-li (i) $(\forall\ (<_i)_{i \in N} \in \mathcal{P})\ (\forall\ a, b \in A)\ ((\forall\, i \in N\ a <_i b) \ \Rightarrow\ a < b)$, kde $< = d((<_i)_{i\in N})$;

(ii) $(\forall\ (<_i)_{i\in N},\ (\prec_i)_{i\in N} \in \mathcal{P})\ (\forall\ a, b \in A)$

$$(\{i \mid a <_i b\} = \{i \mid a \prec_i b\} \ \Rightarrow\ (a < b \ \Leftrightarrow\ a \prec b))\ ,$$

kde $< = d((<_i)_{i\in N}),\ \ \prec\ = d((\prec_i)_{i\in N})$.

Nechť d je funkce sociálního rozhodování. Agent $j \in N$ je její **diktátor**, platí-li

$$(\forall\ (<_i)_{i\in N} \in \mathcal{P})\ (d((<_i)_{i\in N}) = <_j)\ .$$

Věta (Arrow) *Pro alespoň 2 agenty a alespoň 3 alternativy má libovolná funkce sociálního rozhodování diktátora.*

6 Poziční hry

6.1 Základní pojmy

Nechť $N = \{1, ..., n\}$ je množina (všech) hráčů. Nechť $\Gamma = (V, H)$ je (neorientovaný) konečný strom – jeho vrcholy nazýváme **pozice**. Nechť $A \in V$ je jeho kořen – **počáteční pozice** a nechť K je množinou (všech) jeho listů – **koncových pozic**. Nechť $u : K \to \mathbb{R}^n$ je **výherní funkce**, nechť
$\Pi = (S_0, ..., S_n)$ a platí $S_0 \cup ... \cup S_n = V \setminus K$, $S_0, ..., S_n$ po dvou disjunktní,
Množinu všech přímých následníků vrcholu X značme $\alpha(X)$. Nechť μ_X pro $X \in S_0$ je rozdělení pravděpodobnosti na množině $\alpha(X)$, $\mu = (\mu_X)_{X \in S_0}$. V pozici $X \in S_i$ je **na tahu** i-tý hráč, 0-tý hráč je **příroda**. Nechť konečně je pro $i \in N$, $\Sigma_i = \{S_i^1, ..., S_i^{m_i}\}$ rozklad množiny S_i na tzv. **informační množiny** – hráč na tahu pouze ví, ve které z nich se nachází - nezná přesnou pozici. Musí být splněno, že pro X, Y z téže informační množiny S_i^j nejsou tyto ve vztahu předchůdce/následník a množiny $\alpha(X)$ a $\alpha(Y)$ jsou "indexovány" stejnou indexovou množinou I_i^j - její prvek plně zadá tah hráče. Nechť $\Sigma = (\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$ a $I = (I_i^j)_{i \in N,\ j=1,\ldots,m_i}$. Uspořádanou sedmici

$$G = (\Gamma, A, u, \Pi, \mu, \Sigma, I)$$

nazýváme **poziční hrou** n **hráčů**. Tato hra je **s úplnou informací**, jsou-li všechny informační množiny jednoprvkové.

Strategie i-tého hráče je libovolný prvek množiny $\Xi_i = I_i^1 \times ... \times I_i^{m_i}$. Prvky množiny $\Xi = \Xi_1 \times ... \times \Xi_n$ nazýváme **situace**. **Možný průběh partie** při situaci x je posloupnost $\pi = (X_0,\ X_1, ..., X_{k(\pi)}),\ X_0 = A,\ X_{k(\pi)} \in K$ pozic splňující pro $k = 0, ..., k(\pi) - 1$ podmínky $X_k \in S_i^j \ \Rightarrow\ X_{k+1}$ je prvek množiny $\alpha(X_k)$ s indexem x_i^j a $X_k \in S_0 \ \Rightarrow\ X_{k+1} \in \alpha(X_k)$.

Parametr μ přirozeným způsobem definuje pravděpodobnost $\mu(\pi)$ tohoto průběhu. Konečně pro $x \in \Xi$ klademe

$$\xi(x) = \sum_{\pi \text{ možný průběh partie při situaci } x} \mu(\pi) \cdot u(X_{k(\pi)}) \ .$$

Takto jsme naší hře G přiřadili hru $(\Xi_1, \ldots, \Xi_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ v normální formě.

Věta *Libovolná poziční hra s úplnou informací má rovnovážnou situaci.*

Lineární programování

Simplexový algoritmus

Úloha lineárního programování: na podmnožině množiny $\mathbb{R}^n$ zadané konečným systémem neostrých lineárních nerovností (tzv. množina všech **přípustných řešení**) máme maximalizovat / minimalizovat lineární funkci (tzv. **účelovou funkci**).

Simplexový algoritmus slouží k řešení úlohy v tzv. **standardním** tvaru

$$\max\{\ cx^\top \mid Ax^\top = b^\top,\ x \geq 0\ \}\ ,$$

kde $c \in \mathbb{R}^n$, A je matice typu m/n nad $\mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$ a $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je uspořádaná n-tice proměnných.

Libovolnou úlohu lineárního programování můžeme upravit na tento tvar:
1. u úlohy na minimum uvažujeme účelovou funkci $-cx^\top$,
2. je-li některá složka vektoru b záporná, vynásobíme příslušný řádek číslem -1,
3. je-li v některém řádku nerovnost $\geq$, zavedeme novou proměnou z, přidáme v tomto řádku nalevo $-z$ a doplníme podmínku $z \geq 0$,
4. je-li v některém řádku nerovnost $\leq$, zavedeme novou proměnou z, přidáme nalevo $+z$ a doplníme podmínku $z \geq 0$ – tento "nedostatek" je dokonce vítaný kvůli "nastartování" algoritmu,
5. není-li u některé proměnné požadována nezápornost, nahradíme ji rozdílem dvou (nových) nezáporných proměnných.

Výpočet probíhá v krocích, během kterých transformujeme následující tabulku:

	x_1	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	
x_{i_1}	α_{11}	$\ldots$	α_{1j}	$\ldots$	α_{1n}	β_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{i_k}	α_{k1}	$\ldots$	α_{kj}	$\ldots$	α_{kn}	β_k
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{i_m}	α_{m1}	$\ldots$	α_{mj}	$\ldots$	α_{mn}	β_m
	α_1	$\ldots$	α_j	$\ldots$	α_n	β

Hovoříme o nultém, prvním,…, m-tém a posledním řádku, o nultém, prvním,…, n-tém a posledním sloupci. Nultý řádek se nemění, v nultém sloupci je jistá uspořádaná m-tice proměnných – hovoříme o **bázi**. Ostatní prvky tabulky jsou reálná čísla.

Platí

$$\alpha_{1,i_k} = \cdots = \alpha_{k-1,i_k} = \alpha_{k+1,i_k} = \alpha_{m,i_k} = \alpha_{i_k} = 0,\ \alpha_{k,i_k} = 1,\ k = 1, \ldots, m$$

t.j. ve sloupcích $i_1, \ldots, i_m$ je jednotková matice, a

$$\beta_1, ..., \beta_m \geq 0\ .$$

Poslední řádek je vázán s předchozími vztahy

$$\alpha_j = -c_j + c_{i_1} \cdot \alpha_{1j} + \dots + c_{i_m} \cdot \alpha_{mj},\ j = 1, ..., n,\ \beta = c_{i_1} \cdot \beta_1 + \dots + c_{i_m} \cdot \beta_m\ .$$

k-tý řádek ($k = 1, ..., m$) představuje rovnost

$$\alpha_{k1} \cdot x_1 + ... + \alpha_{kn} \cdot x_n = \beta_k\ .$$

Tyto rovnosti jsou ekvivalentní se systémem $Ax^\top = b^\top$. Tabulka určuje bod z $\mathbb{R}^n$ takto: $x_{i_k} = \beta_k,\ k = 1, ..., m$, proměnné mimo bázi mají hodnotu 0 - hovoříme o tzv. **bazickém přípustném řešení**, β je hodnota účelové funkce v tomto bodě.

Transformace provádíme tak dlouho pokud je některé z čísel $\alpha_1, ..., \alpha_n$ záporné. Vybereme některý takový sloupec – nechť je to j-tý. Nechť

$$k_0 \text{ minimalizuje } \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}} \text{ přes } k = 1, ..., m \text{ splňující } \alpha_{kj} > 0\ .$$

Proměnnou x_j dáme do báze místo $x_{i_{k_0}}$, čísla v k_0-tém řádku vydělíme číslem $\alpha_{k_0,j}$ a vhodné násobky tohoto řádku přičteme ke každému dalšímu (včetně posledního) tak, aby nový j-tý sloupec byl tvaru $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^\top$, 1 na k_0-té pozici. Zde je nebezpečí zacyklení pro $\beta_{k_0} = 0$. Pokud se nedokážeme vyhnout nulovému podílu změnou sloupce použijeme např. **Blandovo pravidlo**: Vybíráme zleva první sloupec se záporným α_j a je-li vícekrát $\beta_k = 0,\ \alpha_{kj} > 0$, volíme k_0 s nejmenším i_{k_0}.

Jak ale "nastartovat" simplexový algoritmus ? Pokud je (náhodou) některý sloupec matice A tvaru $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^\top$, dáme příslušnou proměnnou do báze. Pro každý další řádek zavádíme novou nezápornou proměnnou z, nalevo do tohoto řádku přidáme $+z$ a nejprve minimalizujeme součet všech nových proměnných. Pokud měla původní úloha přípustné řešení, umíme skončit s pomocnými proměnnými mimo bázi.

V nejhorším (a obvyklém) případě tedy řešíme nejprve pomocnou úlohu

$$\min\{\ z_1 + \ldots + z_m \mid A \cdot x^\top + E \cdot z^\top = b^\top,\ x \geq 0,\ z \geq 0\ \}\ .$$

Dualita

K úloze lineárního programování

$$\max\left\{ cx^\top \;\middle|\; \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n'} \\ x_{n'+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{m'} \\ b_{m'+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\ x_1, ..., x_{n'} \geq 0 \right\} \qquad \text{(P)}$$

definujeme úlohu **duální**

$$\min\left\{ by^\top \;\middle|\; \begin{bmatrix} A_{11}^\top & A_{21}^\top \\ & \\ A_{12}^\top & A_{22}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{m'} \\ y_{m'+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n'} \\ c_{n'+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},\; y_1, ..., y_{m'} \geq 0 \right\} \qquad \text{(D)}.$$

Přitom A_{11} je blok matice A typu m'/n', A_{12} je blok matice A typu $m'/n-n'$, A_{21} je blok matice A typu $m-m'/n'$, A_{22} je blok matice A typu $m-m'/n-n'$. [1]

Specielně pro $m'=m,\ n'=n$ máme

$$\max\{\, cx^\top \mid Ax^\top \leq b^\top,\ x \geq 0 \,\} \text{ a } \min\{\, by^\top \mid A^\top y^\top,\ y \geq 0 \,\}\ .$$

Platí: 1. Modifikujeme-li úlohu (D) na tvar úlohy (P) a použijeme-li výše uvedené schéma, obdržíme opět úlohu (P).

2. Je-li x přípustné řešení (P) a y přípustné řešení (D), platí $cx^\top \leq by^\top$ – slabá věta o dualitě.

3. Má-li každá z úloh (P), (D) přípustné řešení, má každá i řešení a hodnoty účelových funkcí na nich splývají – silná věta o dualitě.

Lineární programování v teorii her

Náš (konstruktivní) důkaz von Neumannovy věty vedl k tomu, že máme řešit úlohy

$$\min\{\ t_1 + ... + t_m \mid A^\top t^\top \geq (1, ..., 1)^\top,\ t \geq 0\ \} \qquad (1')$$

$$\max\{\ u_1 + ... + u_n \mid Au^\top \leq (1, ..., 1)^\top,\ u \geq 0\ \} \qquad (2').$$

Ty jsou vzájemně duální, (2') je v nejvhodnějším možném tvaru pro použití simplexového algoritmu a dokonce při jejím řešení získáme i řešení (1') (neboť účelové funkce obou úloh mají nezáporné koeficienty).

Při řešení (2') začínáme s tabulkou:

	$u_1\ \dots\ u_n$	$z_1\ \dots\ z_m$	
z_1 $\vdots$ z_m	A	E	1 $\vdots$ 1
	$-1 \dots -1$	$0 \dots 0$	0

Poslední tabulka při řešení (2') dává i řešení $\bar{t}$ úlohy (1'):

[1] Úlohy (P) a (D) nalatexoval p. Petr Kučera.

	$u_1 \ \dots \ u_n$	$z_1 \ \dots \ z_m$	
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
	$\dots$	$\bar{t}_1 \ \dots \ \bar{t}_m$	

TEORIE HER
příklady a zadání zkoušek

Libor Polák, Masarykova Univerzita Brno

Hry v normální formě

1. Dělení koláče

1. hráč zvolí $x \in [0,1]$. 2. hráč poté co zná x buď "souhlasí" (pak 1. hráč vyhrává x a 2. vyhrává $1-x$) nebo zvolí $y \in [0,x)$ (pak 1. vyhrává $1-y$ a 2. vyhrává y).
a) Uveďte normální formu této hry.
b) Spočtěte h_1^-.
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Má 1. hráč dominantní/ nedominovanou strategii ?

2. Dvojice výrobců

Dvojice výrobců produkuje vzájemně zaměnitelné zboží. Pokud si stanoví ceny za jednotku $x > 0$ respektive $y > 0$, bude poptávka $c = (y/x)^\alpha$ respektive $d = (x/y)^\beta$ jednotek zboží ($\alpha, \beta > 1$). Dále víme, že výrobní náklady na jednotku jsou a respektive b ($a, b > 0$ jsou dané konstanty).
a) Uveďte normální formu této hry.
b) Najděte všechny rovnovážné situace.
c) Má 1. hráč strategii, která dominuje libovolnou jinou ?
d) Najděte všechny opatrné strategie 1. hráče.
e) Je to antagonistická hra ?

3. Piráti

Nechť $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ jsou rostoucí funkce,
nechť $\forall\, k, l \in \mathcal{N}_0\ f(k) \neq g(l),\ f(1) < g(n),\ g(1) < f(n)$.

Hráči: n pirátů. Každý může zvolit 1. nebo 2. koráb na ostrov pokladů. Použije-li t pirátů 1. koráb a $n-t$ pirátů 2. koráb, budou tyto na cestě $f(t)$ respektive $g(n-t)$ dnů.
a) Uveďte normální formu této hry.
b) Najděte všechny rovnovážné situace.
c) Pro $n = 3$ najděte výherní funkce pstního rozšíření.
d) Ukažte, že existuje jediné $p \in (0,1)$ tak, že strategie "vzít s pstí p 1. koráb" pro každého piráta je rovnovážná situace ($n = 3$).

4. Souboj

Nechť $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ jsou spojité neklesající funkce a nechť $f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) =$

1. Dva střelci, každý s jediným nábojem, jdou proti sobě. V čase $t \in [0,1]$ je pst zásahu protivníka $f(t)$ respektive $g(t)$. Jak vypadají strategie hráčů ? Existují optimální strategie? Pokud ano, všechny najděte.

Pistole jsou s tlumiči / bez tlumičů !

5. Prodej aut

Je n agentů prodávající automobily. Zisk i-tého agenta z prodeje jednoho automobilu je p_i, za jeho skladování platí c_i. Objedná-li i-tý agent $x_i \in [0,\infty)$, $i = 1,\dots,n$, prodá za dané období $d \cdot \frac{x_i}{x_1+\cdots+x_n}$ v případě $x_1 + \cdots + x_n \geq d$ a x_i jinak.

a) Najděte normální formu této hry.

b) Najděte všechny opatrné strategie i-tého agenta.

c) Najděte všechny nedominované strategie i-tého agenta.

d) Najděte všechny rovnovážné situace této hry (alespoň pro $n = 2$).

e) Je pro $n = 2$ tato hra antagonistická ?

f) Které strategie z d) jsou optimální podle Pareta ?

Teorie her, zadání zkoušek 1996/7

Test

Matice P a Q určují bimaticovou hru.
Určete $h_1^-,\ h_1^+,\ h_2^-,\ h_2^+$ - 4 krát 1 bod;
najděte všechny nedominované strategie pro každého z hráčů - 2 krát 1 bod;
najděte všechny opatrné strategie pro každého z hráčů - 2 krát 1 bod;
najděte všechny rovnovážné situace - 2 body;
najděte všechny situace optimální podle Pareta - 2 body;
je to podstatná hra ? - zdůvodněte - 2 body.

Matice pro skupinu A:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Matice pro skupinu B:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. termín

1. Definujte hru n-hráčů v normální formě, dolní a horní hodnotu hry pro i-tého hráče a dokažte příslušnou nerovnost (20 b).

2. Definujte antagonistickou hru a dokažte, že množina všech rovnovážných situací je tvaru $P \times Q$ pro vhodné množiny $P,\ Q$ strategií prvního resp. druhého hráče (20 b).

3. Symetrická hra n-hráčů ve tvaru charakteristické funkce je zadána čísly $v_0 = 0,\ v_1 = 0,\ v_2,\ \dots,\ v_n = 1$. Kdy má neprázdné jádro ? (20 b)

---

2. termín

1. Připomeňte Shapleyho axiomy (8 b) a odvoďte Shapleyho vektor pro hry tvaru $w_S,\ S \neq \emptyset$ (12 b). (w_S je prostá hra, pro níž $w_S(T) = 1 \ \Leftrightarrow\ S \subseteq T$.)

2. Co je to úloha o dohodě (4 b) ? Jak bimaticovou hru s maticemi $A,\ B$ typu m/n interpretujeme jako úlohu o dohodě (10 b) ? Jak ji řešíme v jediném netriviálním případě (6 b) ? Axiomy formulovat nemusíte.

3. Najděte nějakou rovnovážnou situaci hry na čtverci s výherní funkcí $u(x,y) = -2x^2 + y^2 + 3xy - x - 2y$. (12 b; nedoporučuji počítat dolní/ horní hodnotu). Existuje pro prvního hráče dominantní strategie (8 b) ? Zdůvodnění !

---

3. termín

1. Odvoďte **přímo** z Nashových axiomů, jak vypadá řešení úlohy o dohodě $(S,0,0)$, kde $S = \mathrm{conv}\{(0,0),(1,0),(0,4)\}$.

2. Definujte maticovou hru (2 b), její pravděpodobnostní rozšíření (3 b), modifikujte definici rovnovážné situace pro tento případ (3 b), formulujte (3 b) a dokažte (6 b) Lemma redukující předchozí pojem na ověření konečného počtu nerovností, formulujte von Neumannovu větu (3 b).

3. Nechť $n = 2,\ N = \{1,2\},\ u : 2^N \to \mathbb{R},\ u(\emptyset) = 0,\ u(\{1\}) = a,\ u(\{2\}) = b,\ u(N) = c$. Kdy je to hra ? (3 b) Kdy má neprázdné jádro ? (3 b) Nechť nyní $n = 3,\ N = \{1,2,3\},\ v : 2^N \to \mathbb{R},\ v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,\ v(N) = 1,\ v(\{1,2\}) = p,\ v(\{1,3\}) = q,\ v(\{2,3\}) = r$. Kdy je to hra ? (4 b) Kdy má neprázdné jádro ? (10 b)

Teorie her, zadání zkoušek 1997/8

1. test

1. Každý z dvojice hráčů schová do své pravé ruky 1 nebo 2 nebo 3 mince (všechny mince jsou stejného druhu). Poté ruce současně otevřou a pokud mají stejný počet mincí, získává všechny ukázané první hráč. V opačném případě získává všechny druhý hráč. Najděte optimální strategie obou hráčů. (10 bodů)

2. Matice A a B určují bimaticovou hru.
a) Určete h_1^-, h_1^+, h_2^-, h_2^+ – 2 body;
b) najděte všechny nedominované strategie pro každého z hráčů – 2 krát 1 bod;
c) najděte všechny rovnovážné situace – 2 body;
d) najděte všechny situace optimální podle Pareta – 2 body;
e) je to podstatná hra ? – zdůvodněte – 2 body.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. test

1. Matice A a B určují bimaticovou hru.
a) Najděte nějakou rovnovážnou situaci této hry ve smíšených strategiích, které nejsou čisté.
b) Najděte všechny opatrné (smíšené) strategie obou hráčů.
c) Řešte tuto hru jako úlohu o dohodě.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad 1 < a \leq 4\ .$$

2. Nechť $n = 3,\ N = \{1,2,3\},\ v : 2^N \to \mathbb{R}$,
$v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,\ v(N) = 1,\ v(\{1,2\}) = a,\ v(\{1,3\}) = b,\ v(\{2,3\}) = c.$
a) Kdy je to hra ?
b) Kdy má neprázdné jádro ?

Závěrečné dějství - 1. termín

1. Von Neumannova věta

a) definujte maticovou hru – 2 body,
b) definujte její rovnovážnou situaci – 2 body,
c) uveďte příklad maticové hry nemající rovnovážnou situaci – 2 body,
d) definujte pravděpodobnostní rozšíření maticové hry – 3 body,
e) definujte jeho rovnovážnou situaci – 2 body,
f) formulujte (2 body) a dokažte (3 body) lemma redukující ověření rovnovážnosti na konečný počet nerovností,
g) formulujte (2 body) a dokažte (5 bodů) von Neumannovu větu,
h) demonstrujte větu na svém příkladě z c) – 2 body.

2. Hlasování

Trojice agentů $N = \{1,2,3\}$ vybírá kandidáta z množiny $A = \{a,b,c,d\}$.
Agenda výběru je následující:
agent 1 vyškrtne jednoho z kandidátů,
poté agent 2 vyškrtne dalšího kandidáta,
konečně agent 3 vyškrtne jednoho ze dvou zbývajících.
Zůstane vítěz.

Užitečnosti zvolení jednotlivých kandidátů jsou pro hráče 1,2,3 dány funkcemi u, v, w splňujícími

$$u(d) < u(c) < u(b) < u(a),\ v(c) < v(d) < v(a) < v(b),\ w(c) < w(a) < w(b) < w(d)\ .$$

a) Nalezněte normální formu této hry. Kolik prvků mají množiny všech strategií jednotlivých hráčů ? – 5 bodů
(Množiny strategií nesmí záviset na funkcích u, v, w .)
b) Najděte pro jednotlivé hráče množiny všech jejích nedominovaných strategií – 6 bodů. (Pro hráče 1 a 2 je to náročnější než jiné části úlohy - dělejte to raději na závěr.)
c) Vyřešte hru pomocí postupného odstraňování dominovaných strategií – 4 body.
(Není potřeba zcela zvládnout b): nechť původní množiny strategií jsou X, Y, Z, nechť Z'

je množina všech nedominovaných strategií 3. hráče. Najdeme množinu Y' všech nedominovaných strategií 2. hráče pro hru $(X, Y, Z'; ...)$ a poté množinu X' všech nedominovaných strategií 1. hráče pro hru $(X, Y', Z'; ...)$.)

d) Popište množinu všech situací optimálních podle Pareta. Kolik je jich ? – 5 bodů.

e) Nalezněte nějakou rovnovážnou situaci této hry – 5 bodů.

Závěrečné dějství - 2. termín

1. Jádro her ve tvaru charakteristické funkce

a) Definujte hru n hráčů ve tvaru charakteristické funkce, rozdělení, dominování a jádro. – 2, 2, 4 a 2 body

b) Vyjádřete jádro systémem nerovností a dokažte to. – 3 a 9 bodů

c) Dejte příklad hry s prázdným jádrem. – 3 body

2. Aukce

Jistý předmět (vzácný obraz, továrna, fotbalový tým) se draží "obálkovou metodou". Vyvolávací cena je r, i-tý ($i \in \{1, ..., n\}$) účastník aukce si předmět cení na a_i . Nechť

$$0 < r < a_n < ... < a_2 < a_1 .$$

Předpokládáme, že peníze jsou spojité (= lze platit libovolné $x \in \mathbb{R}$). Účastníci nezávisle na sobě uvedou cenu, za kterou chtějí předmět koupit. Předmět získává ten, který nabídl nejvíce; je-li více těch, kteří uvedli maximální hodnotu, předmět získává ten z nich, který má nejmenší pořadové číslo (= ten, který si předmětu nejvíce cení). Vítěz aukce zaplatí za předmět cenu, kterou nabídl.

a) Uveďte normální formu této hry. (4 body)

b) Pro každého z hráčů určete množinu všech jeho nedominovaných strategií.
(3 body za uvedení výsledku, 4 body za důkaz toho, že dominované jsou skutečně dominované, podobně 4 body za nedominované.)

c) Najděte všechny rovnovážné situace této hry. (5 bodů)

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta. (5 bodů)

Pro archív

Aukce II

Úloha se od předchozí liší jen tím, že vítěz zaplatí za předmět nejvyšší cenu z nabídek ostatních.

Závěrečné dějství - 3. termín

1. Úlohy o dohodě

a) Formulujte úlohu o dohodě – 3 body.
b) Dejte její interpretaci – 3 body.
c) Formulujte Nashovy axiomy – 4 body.
d) Formulujte hlavní větu – 3 body.
e) Dokažte její část týkající se jednoznačnosti (Pokud použijete nějaké lemma, formulujte je, ale nedokazujte.) – 9 bodů.
f) Jak vznikají úlohy o dohodě z bimaticových her ? – 3 body

2. Hlasování II

Dvojice agentů $N = \{1, 2\}$ vybírá kandidáta z množiny $A = \{a_1, ..., a_{2m+1}\}$ $(m \in \mathbb{N})$.
Užitečnosti kandidátů pro agenty 1, 2 jsou dány funkcemi u, v . Nechť

$$u(a_1) > u(a_2) > \cdots > u(a_{2m+1}) \ .$$

Agenti současně udají pořadí kandidátů. Vítěz je ten s nejlepším nejhorším oceněním. Je-li takových více, dává se přednost kandidátu s nejnižším pořadovým číslem.
a) Uveďte normální formu této hry – 4 body.
b) Kdy je tato hra antagonistická ? – 3 body
c) Jaká je dolní hodnota této hry pro prvního hráče ? – 5 bodů
d) Charakterizujte opatrné strategie prvního hráče. – 5 bodů
e) Nechť $m = 1$, $v(a_2) > v(a_3) > v(a_1)$. Najděte všechny rovnovážné situace – 5 bodů.
f) Pro hru s parametry z e) charakterizujte situace optimální podle Pareta – 3 body.

Pokud vám nejde a), c), d) v plné obecnosti, udělejte to alespoň za předpokladů z e) – 2, 2, 2 body.

Teorie her, zadání zkoušek 1998/9

1.test

1. Každý z dvojice hráčů schová do své pravé ruky 1 nebo 2 nebo 3 mince (všechny mince jsou stejného druhu). Poté ruce současně otevřou a ten. kdo má o jedinou minci více získává všechny ukázané (počítáme modulo 3). Pokud ukázali stejný počet, nic se neděje. Najděte optimální strategie obou hráčů. (10 bodů)

2. Matice A a B určují bimaticovou hru.
a) Určete $h_1^-,\ h_1^+,\ h_2^-,\ h_2^+$ – 2 body;
b) najděte všechny nedominované strategie pro každého z hráčů – 2 krát 1 bod;
c) najděte všechny rovnovážné situace – 2 body;
d) najděte všechny situace optimální podle Pareta – 2 body;
e) je to podstatná hra ? – zdůvodněte – 2 body.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dokažte, že pro maticovou hru s kososymetrickou maticí (t.j. $A^\top = -A$) existuje rovnovážná smíšená strategie tvaru $(\overline{x}, \overline{x})$. (5 prémiových bodů).

2. test

1. Uvažujme hru "piráti" s výherní funkcí danou tím, že piráti z korábu, krerý přijel dříve, se rozdělí o (jediný) poklad rovnoměrně. Nechť $f(\overline{t}) < g(n-\overline{t}),\ f(\overline{t}+1) > g(n-\overline{t}-1)$.
a) Popište pravděpodobnostní rozšíření této hry.
b) Najděte všechny rovnovážné situace v ryze smíšených strategiích v případě $n = 3,\ \overline{t} = 1$.

2. Nechť u bimaticové hry i-tá strategie prvního hráče dominuje jeho j-tou strategii.

a) Dokažte, že existuje rovnovážná situace ve smíšených strategiích, v níž první hráč používá j-tou strategii s pravděpodobností 0.

b) Dejte příklad, kde navíc k-tá strategie druhého hráče dominuje jeho l-tou strategii a existuje rovnovážná situace, v níž první hráč hraje svou j-tou strategii s nenulovou pravděpodobností a druhý hráč svou l-tou strategii též s nenulovou pravděpodobností.

---

1. termín

1. a) O událostech $A,\ B,\ C$ víme, že $C \prec B \prec A$ a že $u(B) = b,\ u(C) = c$. Jak určíme $u(A)$?

b) Co když řešíme maticovou hru jako úlohu o dohodě ?

(10 a 5 bodů.)

2. a) Uveďte všechny prosté hry 3 hráčů. (Nerozlišujte mezi takovými, kdy jedna vznikne z druhé přeznačením hráčů.)

b) Které z nich jsou podstatné ?

c) Které z nich mají neprázdné jádro ?

(5, 5 a 5 bodů.)

3. Úsečka $[0, 1]$ symbolizuje koláč, který se dělí mezi dva hráče. Užitečnost zisku $A \subseteq [0, 1]$ je pro prvního resp. druhého hráče

$$p(A) = \int_A (\frac{3}{2} - x)dx \quad \text{resp.} \quad q(A) = \int_A (\frac{1}{2} + x)dx \ .$$

Nad koláčem se pohybuje nůž od bodu 0 do bodu 1 (zleva doprava). Kterýkoliv z hráčů může v kterýkoliv okamžik nůž zastavit. Pokud dají signál k zastavení současně, má přednost signál prvního hráče. Ten, kdo nůž zastavil dostává levou část, zbývající hráč pravou část.

a) Najděte normální formu této hry.

b) Najděte všechny opatrné strategie pro každého z hráčů.

c) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho nedominované strategie.

d) Najděte nějakou rovnovážnou situaci této hry.

e) Je naše hra antagonistická ? (Můžete se pokusit o charakterizaci všech situací optimálních podle Pareta.)

(Každá část 6 bodů.)

---

2. termín

1. **Grafické řešení maticových her typu $2/m$.**

a) Nakreslíme všechny úsečky $[\ [0, a_{2j}],\ [1, a_{1.j}]\ ]$, $j = 1, ..., m$. Jak najdeme opatrné strategie 1. hráče ? Jak najdeme rovnovážné situace ?

b) Metodou z a) najděte všechny rovnovážné situace hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

(10 a 5 bodů.)

2. Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce s neprázdným jádrem C a nechť V je nějaké její NM-řešení.

a) Jaký je vztah mezi množinami C a V ?

b) Dejte příklad, kdy $C = V$.

c) Dejte příklad, kdy $C \neq V$.

(5, 5 a 5 bodů.)

3. **Spravedlivá korupce.**

Tři agenti vybírají alternativu z množiny $A = \{1, ..., m\}$. Jejich zisky při výběru j-té jsou p_j, q_j resp. r_j. Agenda je následující:

První navrhne alternativu a částky druhému a třetímu (mohou být i záporné), které od něj dostanou při schválení. Pokud některý z nich nesouhlasí, navrhuje druhý alternativu a částku třetímu (může být i záporná), kterou od něj dostane při schválení. (Prvního agenta se již nikdo na nic neptá.) Pokud třetí nesouhlasí, vybere alternativu.

Předpokládáme, že všechny částky jsou celočíselné.

a) Najděte normální formu této hry.

b) Popište opatrné strategie jednotlivých agentů.

c) Popište nedominované strategie jednotlivých agentů.

d) Nechť

$$p = (10, 9, 6, 8, 11),\ q = (2, 5, 9, 10, 11),\ r = (10, 8, 6, 4, 2)\ .$$

Odstraňte dominované strategie třetího agenta. V nové hře nechte pouze opatrné strategie druhého agenta a konečně v takto získané hře vyšetřete opatrné strategie prvního agenta.

(6, 6, 6 a 12 bodů.)

---

3. termín

1. Nechť A je matice typu 3×3.

a) Nechť jedinou rovnovážnou situací hry určené maticí A je pozice $(1, 1)$. Může odebráním 3. řádku / přidáním 4. řádku tato rovnovážná situace zmizet a rovnovážnou se stát nějaká jiná ?

b) Nechť jedinou opatrnou strategií hry určené maticí A je volba 1. řádku. Může odebráním 3. řádku / přidáním 4. řádku tato opatrná strategie zmizet a nějaká jiná se stát opatrnou ?

c) Předpoklady jako v b). Může odebráním 3. sloupce / přidáním 4. sloupce tato opatrná strategie zmizet a nějaká jiná se stát opatrnou ?

Je to celkem 6 otázek. Záporné odpovědi vysvětlete, kladné dokumentujte příklady.

(5, 5 a 5 bodů.)

2. Nechť v je hra ve tvaru charakteristické funkce, která je symetrická a je určena hodnotami

$$v_0 = v_1 = 0,\ v_2 = 2/3,\ v_3 = 1\ .$$

a) Najděte množinu všech rozdělení a jádro této hry.

b) Která rozdělení jsou dominována vektorem $(1/3, 1/3, 1/3)$?

c) Dokažte, že množina

$\{(1/3+\varepsilon, 1/3, 1/3-\varepsilon) \mid 0 \le \varepsilon \le 1/3\} \cup$

$\{(1/3-\varepsilon, 1/3+\varepsilon, 1/3) \mid 0 \le \varepsilon \le 1/3\} \cup$

$\{(1/3, 1/3-\varepsilon, 1/3+\varepsilon) \mid 0 \le \varepsilon \le 1/3\}$

tvoří NM-řešení naší hry.

Návod: Pro rozdělení (x, y, z) splňující $x \ge y, z$ rozlišme

1. $x + z < 2/3$
2. $x + z = 2/3$
3. $x + z > 2/3,\ z < 1/3$
4. $x + z > 2/3,\ z \ge 1/3$.

(5, 5 a 5 bodů.)

3. **Korupce se svatým předsedou.**

Množina agentů $N = \{1, ..., n\}$ vybírá alternativu z množiny $A = \{1, ..., m\}$.

Nejprve uvažme druhou fázi agendy:

Je dána matice Q typu $n/(m+1)$ a agent i_0.

Ten nabízí alternativu a (nezáporné) úplatky ostatním hráčům. Zisk i-tého hráče při výběru j-té alternativy je dán číslem $q_{i,j}$. V posledním sloupci jsou uvedeny zisky jednotlivých agentů v případě, že některý agent s návrhem nesouhlasí. (Ke všem hodnotám jsou přičteny úplatky získané v první fázi.)

a) Najděte normální formu této hry.

b) Popište opatrné strategie jednotlivých agentů.

c) Popište nedominované strategie jednotlivých agentů.

d) Demonstrujte vše na příkladě

$$i_0 = 1,\ Q = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 6 & 8 & 7 \\ 4 & 10 & 3 & 7 & 6 \\ 6 & 4 & 17 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

První fáze:

Předseda navrhne alternativu a vektor bočních plateb mezi agenty, tj. $a \in A,\ b \in \mathbb{Z}^n,\ b_1 + ... + b_n = 0$. Na výběru alternativy je zainteresován pouze morálně. V našem modelu není hráčem.

Dále je dána matice P typu n/m. Zisk i-tého hráče při výběru j-té alternativy je dán číslem $p_{i,j}$.

Agenti licitují, kdo bude ve druhé fázi podávat návrh. Probíhá to tak, že postupně nabízejí ostatním úplatek (kladný, všem stejný). Rozhoduje výše úplatku, v případě rovnosti má přednost agent s nižším pořadovým číslem.

e) Předpokládáme, že ve druhé fázi bude hrát agent i_0 opatrnou strategii (vzhledem k nedominovaným strategiím ostatních) a ostatní nějaké nedominované. Jak si budete počínat v roli i-tého hráče ?

f) Demonstrujte vše na příkladě

$$a = 4,\ b = (-1, -1, 2), \quad P = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 17 & 7 \end{pmatrix}.$$

Předpokládáme, že všechny částky jsou celočíselné.

(4, 5, 5, 5, 5 a 6 bodů.)

Teorie her, zadání zkoušek 1999/2000

1. termín

1. Matice A a B určují bimaticovou hru.

a) Najděte nějakou rovnovážnou situaci této hry ve smíšených strategiích, které nejsou čisté.

b) Najděte všechny opatrné (smíšené) strategie obou hráčů.

c) Řešte tuto hru jako úlohu o dohodě.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad 1 < a \leq 5 \ .$$

(3, 3 a 4 body)

3. Prsty

a) 2 hráči sedí naproti sobě u stolu. Pod ním si na pravé i levé ruce připraví jeden nebo dva vztyčené prsty. Současně zvednou ruce zpoza stolu. Pravou rukou každý hádá, kolik má jeho protivník vztyčených prstů na levé ruce. Jestliže uhodl právě jeden z hráčů, vyhrává počet peněžních jednotek rovných počtu vztyčených prstů na levých rukách. Najděte optimální strategie příslušné maticové hry.

b) Zábavnější varianta: všechny uhodnuté prsty se useknou a hra se opakuje. Konec nastává, když se některý z hráčů již nemůže chlubit žádnými prsty levé ruky. Nalezněte alespoň rekurentní vztahy.

(10 a 10 bodů)

3. Aukce

Jistý předmět (vzácný obraz, továrna, fotbalový tým) se draží ‘obálkovou metodou”. Vyvolávací cena je v, i-tý ($i \in \{1, ..., n\}$) účastník aukce si předmět cení na c_i . Nechť

$$0 < v < c_n < ... < c_2 < c_1 \ .$$

Předpokládáme, že peníze jsou spojité (= lze platit libovolné $x \in \mathbb{R}$). Účastníci nezávisle na sobě uvedou cenu, za kterou chtějí předmět koupit. Předmět získává ten, který nabídl nejvíce; je-li více těch, kteří uvedli maximální hodnotu, předmět získává ten z nich, který má nejmenší pořadové číslo (= ten, který si předmětu nejvíce cení). Vítěz zaplatí za předmět nejvyšší cenu z nabídek ostatních.

a) Uveďte normální formu této hry. (4 body)

b) Pro každého z hráčů určete množinu všech jeho nedominovaných strategií. (3 body za uvedení výsledku, dalších 6 bodů za důkaz.)

c) Najděte všechny situace optimální podle Pareta. (5 bodů)

Kdo si hraje, nezlobí.

---

2. termín

1. Grafické řešení maticových her typu $2/m$.

) Nakreslíme všechny úsečky $[\ [0, a_{2j}],\ [1, a_{1.j}]\ ]$, $j = 1, ..., m$. Jak najdeme opatrné strategie 1. hráče ? Jak najdeme rovnovážné situace ?

b) Metodou z a) najděte všechny rovnovážné situace hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(10 a 5 bodů.)

2. Prosté hry.

a) Uveďte všechny (superaditivní a personální) prosté hry 3 hráčů. (Nerozlišujte mezi takovými, kdy jedna vznikne z druhé přeznačením hráčů.)

b) U každé z nich vyznačte diktátory a veta hráče.

c) U každé z nich spočtěte jádro.

(4, 3 a 5 bodů.)

3. Aukce III

V aukci II se jistý předmět draží "obálkovou metodou". Vyvolávací cena je v, i-tý ($i \in \{1, ..., n\}$) účastník aukce si předmět cení na c_i . Nechť

$$0 < v < c_n < ... < c_2 < c_1 \ .$$

Předpokládáme, že peníze jsou spojité (= lze platit libovolné $x \in \mathbb{R}$). Účastníci nezávisle na sobě uvedou cenu, za kterou chtějí předmět koupit. Předmět získává ten, který nabídl nejvíce; je-li více těch, kteří uvedli maximální hodnotu, předmět získává ten z nich, který má nejmenší pořadové číslo (= ten, který si předmětu nejvíce cení). Vítěz zaplatí za předmět nejvyšší cenu z nabídek ostatních. Již víme, že zde má každý hráč jedinou dominantní strategii - tou je pro i-tého hráče c_i.

Nyní hráči $i = 2, ..., n$ dají (nezávisle) 1. hráči lísteček uvádějící, kolik požadují za odstoupení z aukce ($x_2, ..., x_n > 0$). 1. hráč se rozhodne, které hráče vyplatí a aukce proběhne tak, že každý hraje svoji dominantní strategii.

a] Najděte všechny nedominované strategie 1. hráče.

b) Najděte nějakou rovnovážnou situaci naší hry.

c) Předpokládejme, že při stejném zisku dá 1. hráč přednost strategii, při níž se dražby zúčastní menší počet hráčů. Jak by si počínal i-tý ($i \geq 2$), kdyby znal $x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$?

(6, 6 a 6 bodů)

I dospělí si mohou hrát.

---

3. termín

1. Prsty o život

2 hráči sedí naproti sobě u stolu. Pod ním si na pravé ruce připraví jeden, dva nebo tři vztyčené prsty. Současně zvednou ruce zpoza stolu. První hráč se snaží uhodnout svým gestem, kolik ukáže druhý. Naopak druhý hráč se snaží ukázat jiný počet prstů než první. Hraje se o život.

(12 bodů)

2. Jádro her ve tvaru charakteristické funkce

U hry tří hráčů je dáno

$v(\emptyset) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,\ v(\{1,3\}) = 2/3,\ v(\{2,3\}) = 5/8.\ v(\{1,2,3\}) = 1.$

Vzhledem k parametrům $a = v(\{1\}),\ b = v(\{1,2\})$ diskutujte

a) Kdy je to (personální a superaditivní) hra ?

b) Nechť jsou splněny předpoklady z a). Kdy má tato hra neprázdné jádro ?

(5 a 10 bodů)

3. Pohyblivý nůž II

Úsečka $[0,1]$ symbolizuje koláč, který se dělí mezi dva hráče. Užitečnost zisku $A \subseteq [0,1]$ je pro prvního resp. druhého hráče

$$p(A) = \int_A x\ dx \quad \text{resp.} \quad q(A) = \int_A (1-x)dx\ .$$

Nad koláčem se pohybuje nůž od bodu 0 do bodu 1 (zleva doprava). Kterýkoliv z hráčů může v kterýkoliv okamžik nůž zastavit. Pokud dají signál k zastavení současně, má přednost signál prvního hráče. Ten, kdo nůž zastavil dostává levou část, zbývající hráč pravou část.

a) Najděte normální formu této hry.

b) Najděte všechny opatrné strategie prvního hráče.

c) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

(4, 6 a 8 bodů)

Co Tě nezabije, to Tě posílí (aspoň na chvíli).

Teorie her, zadání zkoušek 2000/1

1. termín

1. Dejte příklad bimaticové hry a strategií k a l pro prvního hráče této hry ?ak, aby k byla opatrná ale nebyla nedominovaná a l byla nedominovaná ale nebyla opatrná. (Uvažujeme pouze čisté strategie).

2. Dva mladíci se baví tím, že se středem vozovky proti sobě rozjedou svými auty a kdo první uhne ztratí prestiž. Jedná se o bimaticovou hru s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & -100 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & -100 \end{pmatrix}$$

Strategiemi každého z hráčů jsou Uhne, Neuhne.

a) Najděte všechny opatrné čisté strategie obou hráčů.
b) Najděte všechny opatrné smíšené strategie obou hráčů.
c) Najděte všechny nedominované čisté strategie obou hráčů.
d) Najděte všechny nedominované smíšené strategie obou hráčů.
e) Najděte všechny rovnovážné situace v čistých strategiích.
f) Najděte všechny rovnovážné situace ve smíšených strategiích.
g) Najděte všechny situace optimální podle Pareta (v čistých strategiích).
h) Řešte tuto úlohu jako úlohu o dohodě.
i) Řešte tuto úlohu ve vyhrožovacích strategiích.

3. Uvažujeme symetrickou hru 3 hráčů ve tvaru charakteristické funkce

$$v_0 = v_1 = 0,\ v_2 = \frac{2}{3},\ v_3 = 1\ .$$

a) Spočtěte její jádro C.
b) Pro každý vektor x z množiny všech rozdělení E, který není v C najděte nějaký vektor y dominující x.
c) Je množina C NM-řešením ? Zdůvodněte.
d) Je pravda, že libovolné NM-řešení V obsahuje množinu C ? Zdůvodněte.

2. termín

1. Dejte příklad maticové hry, u níž postupné odstraňování dominovaných strategií vede na hru s maticí typu 1/1. Příklad ?usí být takový, že potřebujeme alespoň 3 fáze.

2. Hraje se hra “kámen, nůžky, papír” s tím, že vítěz získává předmět užitečnosti 1, V případě remízy nezískává nikdo nic.
a) Je to antagonistická hra ?
b) Najděte všechny opatrné smíšené strategie obou hráčů.
c) Najděte nějakou rovnovážnou situaci ve smíšených strategiích.
c) Řešte tuto úlohu jako úlohu o dohodě.

3. Uvažujeme hru 3 hráčů ve tvaru charakteristické funkce

$$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1/6,\ v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 2/3,\ v(\{2,3\}) = a,\ a \in \mathbb{R}\,.$$

a) Pro která a se jedná o (superaditivní) hru ?
b) Pro která a má tato hra neprázdné jádro ?
c) Transformujte hru na (0,1)-redukovaný tvar.
d) Spočtěte Shapleyeho vektor naší hry.

Teorie her, zadání zkoušek 2001/2

2. termín

1. Boty

Jediný hodnotný předmět vlastněný **levobotkem** je jedna levá bota; podobně pro **pravobotka**. Hráči : m levobotků a n pravobotků, $m > n$. Výhra koalice je dána počtem párů bot, které se jim podaří sestavit.

a) Spočtěte jádro této hry.

b) Pro $m = 3,\ n = 2$ spočtěte Shapleyho vektor.

Body: 10, 10

2. Jízda

Dvě dívky se baví tím, že se středem vozovky proti sobě rozjedou svými auty a která první uhne ztratí prestiž. Jedná se o bimaticovou hru s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}$$

Strategiemi každého z hráčů jsou Uhne, Neuhne.

a) Najděte všechny rovnovážné situace v čistých strategiích.

b) Najděte všechny rovnovážné situace ve smíšených strategiích.

c) Najděte všechny situace optimální podle Pareta (v čistých strategiích).

d) Řešte tuto úlohu jako úlohu o dohodě.

e) Řešte tuto úlohu ve vyhrožovacích strategiích.

Body: 3, 4, 3, 5, 5

3.Mince

Každý z dvojice hráčů schová do své pravé ruky 1 nebo 2 nebo 3 mince (všechny mince jsou stejného druhu). Poté ruce současně otevřou a pokud mají stejný počet mincí, všechny ukázané si bere druhý hráč. V opačném případě získává všechny první hráč. Najděte optimální strategie obou hráčů.

20 bodů

Teorie her, zadání zkoušek 2002/3

1. termín

1. U bimaticové hry může mít strategie prvního hráče následující vlastnosti :
(O) býti opatrnou,
(ND) býti nedominovanou,
(SR) býti složkou nějaké rovnovážné situace.
Které z osmi možných kombinací mohou nastat ? Pokud něco nemůže nastat, dokažte to. To co může nastat dokumentujte příklady. Pokuste se vystačit maximálně se dvěma hrami.
Uvažujeme pouze čisté strategie !

2. Dva kandidáti na prezidenta se před devátým volebním kolem předvádějí tím, že se středem vozovky proti sobě řítí svými služebními auty a kdo první uhne ztratí hlasy části svých voličů. Jedná se o bimaticovou hru s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Strategiemi každého z hráčů jsou Neuhne, Uhne.
a) Najděte všechny nedominované čisté strategie obou hráčů.
b) Najděte všechny nedominované smíšené strategie obou hráčů.
c) Najděte všechny opatrné čisté strategie obou hráčů.
d) Najděte všechny opatrné smíšené strategie obou hráčů.
e) Najděte všechny rovnovážné situace v čistých strategiích.
f) Najděte všechny rovnovážné situace ve smíšených strategiích.
g) Najděte všechny situace optimální podle Pareta (v čistých strategiích).
h) Řešte tuto úlohu jako úlohu o dohodě.
i) Řešte tuto úlohu ve vyhrožovacích strategiích.

3. Uvažujeme hru 3 hráčů ve tvaru charakteristické funkce
$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = a,\ v(\{2\}) = 1/6,\ v(\{3\}) = 1/4,\ v(\{1,2\}) = 1/2,\ v(\{1,3\}) = 2/3,\ v(\{2,3\}) = 3/4,\ v(\{1,2,3\}) = 1,\ a \in \mathbb{R}$.
a) Pro která a se jedná o (superaditivní) hru ?
b) Pro která a má tato hra neprázdné jádro ?
c) Transformujte hru na (0,1)-redukovaný tvar.
d) Spočtěte Shapleyeho vektor naší hry.

e) Pro která a patří Shapleyeho vektor do jádra ?

---

2. termín

1. U **maticové hry** může mít strategie prvního hráče následující vlastnosti :
(O) býti opatrnou,
(ND) býti nedominovanou,
(SR) býti složkou nějaké rovnovážné situace.
Které z osmi možných kombinací mohou nastat ? Pokud něco nemůže nastat, dokažte to. To co může nastat dokumentujte příklady. Pokuste se vystačit maximálně se dvěma hrami.
Uvažujeme pouze čisté strategie !

2. Dva noví kandidáti na prezidenta se před desátým volebním kolem předvádějí tím, že se středem vozovky proti sobě řítí svými služebními auty a kdo první uhne ztratí hlasy části svých voličů. Jedná se o bimaticovou hru s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 2 \\ -5 & -1 & -10 \\ -4 & -10 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -10 & -5 & -4 \\ 3 & -1 & -10 \\ 2 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

Strategiemi každého z hráčů jsou Neuhne, Uhne doleva, Uhne doprava.
a) Najděte všechny nedominované čisté strategie prvního hráče.
b) Najděte všechny opatrné čisté strategie prvního hráče.
c) Najděte nějakou opatrnou smíšenou strategii prvního hráče.
d) Najděte všechny rovnovážné situace v čistých strategiích.
e) Najděte nějakou další rovnovážnou situaci ve smíšených strategiích.
f) Najděte všechny situace optimální podle Pareta (v čistých strategiích).
g) Řešte tuto úlohu ve vyhrožovacích strategiích.

3. Uvažujeme hru 3 hráčů ve tvaru charakteristické funkce
$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = 1/4,\ v(\{2\}) = 1/6,\ v(\{3\}) = 1/4,\ v(\{1,2\}) = a,\ v(\{1,3\}) = 2/3,\ v(\{2,3\}) = 3/4,\ v(\{1,2,3\}) = 1,\ a \in \mathbb{R}$.
a) Pro která a se jedná o (superaditivní) hru ?
b) Pro která a má tato hra neprázdné jádro ?
c) Transformujte hru na (0,1)-redukovaný tvar.
d) Spočtěte Shapleyeho vektor naší hry.
e) Pro která a patří Shapleyeho vektor do jádra ?

Body: 20; 3,3,10,3,12,3,6; 8,8,8,8,8.

Teorie her, zadání zkoušek 2003/4

1. termín

1. Dvojice prodejců získává jednotku daného zboží za $p > 0$ resp. $q > 0$. Stanoví-li si prodejní ceny $x > 0$ resp. $y > 0$, prodají

$$\frac{y^2 c}{x^2 + y^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{x^2 c}{x^2 + y^2}$$

jednotek ($c > 0$ je daná konstanta).
a) Určete normální formu této hry.
b) Spočtěte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a jeho opatrné strategie.
c) Určete nedominované strategie prvního hráče.
d) Najděte všechny rovnovážné situace.

2. Řešte prosím maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

3. Trojice akcionářů má 10, 20, resp. $a > 0$ kusů akcií. Vítězná koalice je ta, která má více jak polovinu ze všech akcií. Určete laskavě Shapleyho vektor.

2. termín

1. 1. hráč zvolí $x \in [0, 1]$. 2. hráč poté co zná x buď 'souhlasí" (pak 1. hráč vyhrává x a 2. vyhrává $1 - x$) nebo zvolí $y \in [0, x)$ (pak 1. vyhrává $1/2 - y/2$ a 2. vyhrává y).
a) Uveďte normální formu této hry.
b) Spočtěte dolní hodnotu hry a všechny opatrné strategie prvního hráče.
c) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
d) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Řešte usilovně maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

3. Nechť $n = 3,\ N = \{1,2,3\},\ v : 2^N \to \mathbb{R}$,
$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = 1,\ v(\{2\}) = 2,\ v(\{3\}) = 3,\ v(\{1,2\}) = 6,\ v(\{1,3\}) = 8,\ v(\{2,3\}) = p,\ v(N) = 12.$

a) Pro která p je uvedená hra superaditivní ?

b) Pro která p má tato hra neprázdné jádro ?

Teorie her, zadání zkoušek 2004/5

1. termín

1. Dvojice prodejců získává jednotku daného zboží za $p > 0$ resp. $q > 0$. Stanoví-li si prodejní ceny $x > 0$ resp. $y > 0$, prodají

$$\frac{yc}{x+y} \quad \text{resp.} \quad \frac{xc}{x+y}$$

jednotek ($c > 0$ je daná konstanta).
a) Určete normální formu této hry.
b) Spočtěte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a jeho opatrné strategie.
c) Určete nedominované strategie prvního hráče.
d) Najděte všechny rovnovážné situace.

2. Řešte prosím maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

3. Trojice akcionářů má 10, 20, resp. $a > 0$ kusů akcií. Vítězná koalice je ta, která má alespoň 2/3 všech akcií. Určete laskavě Shapleyho vektor.

Teorie her, zadání zkoušek 2005/6

1. termín

1. Dvojice hráčů má vybrat kandidáta z množiny $A = \{a, b, c\}$. Oba (nezávisle) zadají pořadí kandidátů. Za první místo jsou 2 body a za druhé 1 bod. Má-li více kandidátů stejný počet bodů, dává se přednost tomu, kdo je dříve v abecedě. Nechť pro užitečnosti zvolení jednotlivých kandidátů platí

$$u(a) > u(b) > u(c),\ v(a) < v(b) < v(c)\ .$$

a) Uveďte tabulku, v níž jsou řádky indexovány strategiemi prvního hráče a sloupce strategiemi druhého hráče. Na pozici (i, j) je vybraný kandidát, použil-li první hráč strategii i a druhý strategii j.

b) Je naše hra antagonistická ? Zdůvodněte.

c) Najděte pro oba hráče všechny jejich (čisté) opatrné strategie.

d) Najděte pro oba hráče všechny jejich (čisté) nedominované strategie.

e) Najděte všechny rovnovážné situace v čistých strategiích.

f) Mějme maticovou hru s maticí A typu $m/n,\ m \geq 2$. Nechť m-tý řádek je dominován $(m-1)$-tým, nechť A' je matice A bez posledního řádku. Dokažte : je-li $(\overline{x}, \overline{y})$ (smíšená) rovnovážná situace hry s matici A', je $((\overline{x}, 0), \overline{y})$ rovnovážná situace hry s matici A.

g) Nechť

$$u(a) = 3,\ u(b) = 2,\ u(c) = 1,\ v(a) = 1,\ v(b) = 3,\ v(c) = 4\ .$$

Opakovaným užitím f) a analogického tvrzení pro druhého hráče najděte nějakou další rovnovážnou situaci ve smíšených strategiích.

2. Nechť $a, b > 0$ a nechť bimaticová hra je určena maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\ .$$

a) Najděte (jediné) smíšené opatrné strategie obou hráčů. Zdůvodněte jednoznačnost.

b) Kromě dvou rovnovážných situací v čistých strategiích existuje jediná další ve smíšených strategiích. Najděte ji a zdůvodněte, že více rovnovážných situací neexistuje.

3. Nechť $n = 3,\ N = \{1, 2, 3\},\ v : 2^N \to \mathbb{R}$,
$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = a,\ v(\{2\}) = b,\ v(\{3\}) = c,\ v(\{1, 2\}) = 2,\ v(\{1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 4,\ v(N) = p$.

a) Pro která a, b, c, p je uvedená hra superaditivní ?
b) Pro která a, b, c, p má tato hra neprázdné jádro ?

---

2. termín

1. Dělení koláče II.
Každý z $n \geq 2$ hráčů (nezávisle) určí $x_i \in [0, 1]$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$). Výhra i-tého je

$$u_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_i & \text{pro } x_1 + \cdots + x_n \leq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad i \in \{1, \ldots, n\} .$$

a) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho opatrné strategie. Výsledek zdůvodněte.
b) Je naše hra antagonistická ? Výsledek zdůvodněte.
Kolokvium : c) Ukažte, že situace x, pro níž $x_1 + \cdots + x_n = 1$, je rovnovážná.
Zkouška : c) Najděte všechny rovnovážné situace. Výsledek zdůvodněte.
d) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho nedominované strategie. Výsledek zdůvodněte.

2. Akcionáři.
Trojice akcionářů má 10, 30, resp. $p > 0$ kusů akcií. Vítězná koalice je ta, která má více jak polovinu ze všech akcií. Určete laskavě Shapleyho vektor.

3. Maticová hra.
Najděte nějakou dvojici $(\overline{x}, \overline{y})$ optimálních strategií pro maticovou hru s maticí

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} .$$

Uvedením $\overline{x}A$ a $A\overline{y}^\top$ se přesvědčte o správnosti výpočtu.

---

3. termín

1. Dotace.
i-tý z $n \geq 2$ občanů ČR (nezávisle) určí pro rok 2007 dotaci vládní straně $x_i \in [0, a_i]$, kde a_i je jeho příjem v roce 2006, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Užitečnost kvality života i-tého v roce 2007 bude :

suma vybraných peněz krát $a_i - x_i$.

a) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho opatrné strategie. Výsledek zdůvodněte.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ? Výsledek zdůvodněte.

Kolokvium : c) Nechť $a_1 = \cdots = a_n$. Najděte nějakou rovnovážnou situaci $x = (x_1, \ldots, x_n)$ splňující $x_1 = \cdots = x_n$.

Možný návod : vzpomeňte si, kde má funkce $x(1-x)$ na $[0,1]$ maximum.

2. Piráti II.

Posádka $n \geq 2$ pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést dva piráti. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce, kde

$$v(S) = \begin{cases} |S|/2 \text{ pro } |S| \text{ sudé} \\ \qquad ..... \qquad\qquad \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočtěte, prosím, jádro naší hry. Pokud vám to nejde v plné obecnosti, učiňte tak laskavě alespoň pro $n = 3$ a $n = 4$.

3. Volby.

V nedaleké spřátelené zemi se nedávno konaly parlamentní volby. Do sněmovny se dostaly strany $A, B, \ldots, F$ s následujícím počtem poslanců : 50, 31, 20, 20, 15, 14. Vítězná koalice je ta, která má nadpoloviční většinu poslanců. Spočtěte pozorně Shapleyho vektor strany A.

Teorie her, zadání zkoušek 2006/7

1. termín

1. Poslanci si mají rozdělit sumu c na své měsíční platy. Všichni současně určí, kolik by kdo chtěl dostávat. Je-li součet požadavků realizovatelný, jejich přání se splní. V opačném případě se rovnoměrně rozdělí o sumu $c/2$.

a) Najděte normální formu této hry.

b) Najděte dolní hodnotu hry pro i-tého hráče a všechny jeho opatrné strategie.

c) Najděte nějakou rovnovážnou situaci (existuje i taková, že $x_1 = \cdots = x_n$).

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.

Jen zkouška : e) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Každý z dvojice lvů se snaží získat kontrolu nad jistým územím. Každý má dvojici strategii : zbabělou a agresivní. Jedná se o bimaticovou hru s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V bodech a) - d) pracujeme jen s čistými strategiemi.

a) Pro prvního hráče najděte dolní a horní hodnotu hry a všechny jeho opatrné strategie.

b) Pro prvního hráče najděte všechny jeho nedominované strategie.

c) Najděte všechny rovnovážné situace.

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.

Jen zkouška : e) Řešte úlohu jako úlohu o dohodě.

3. Majitel firmy je hráč 0. Má n zaměstnanců označených 1,$\ldots, n$.
Nechť $f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}^+ (= \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}),\ f(0) = 0$. Pro $S \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ klademe

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \notin S \\ f(|S| - 1) & \text{pro } 0 \in S\ . \end{cases}$$

a) Pro která f je hra superaditivní ?

b) Nechť je splněna podmínka z a). Spočtěte jádro pro $n = 2$. Můžete psát $f(1) = a,\ f(2) = b$.

Jen zkouška : c) Nechť funkce f je konkávní. Ukažte, že příslušnost vektoru k jádru lze vyjádřit $n + 1$ vztahy.

---

2. termín

1. Dvojice hráčů hraje hru (X, Y, u, v), kde

$$X = Y = [0,1],\ u(x,y) = x(1-x-y) \text{ a } v(x,y) = y(1-x-y)\ .$$

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Najděte nějakou rovnovážnou situaci.
Jen zkouška : c) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Máme bimaticovou hru s hráči :
N - nejslavnější fotbalový klub, M - méně slavný fotbalový klub,
s čistými strategiemi pro každý z klubů :
P - podplatit rozhodčího, U - řádně se připravit a usilovně hrát.
Užitečnosti jednotlivých událostí pro nastávající utkaním jsou dány maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

V bodech a) - d) pracujeme jen s čistými strategiemi.
a) Pro prvního hráče najděte dolní a horní hodnotu hry a všechny jeho opatrné strategie.
b) Pro prvního hráče najděte všechny jeho nedominované strategie.
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
Jen zkouška : e) Řešte úlohu jako úlohu o dohodě.

3. Majitel firmy je hráč 0. Má n zaměstnanců označených $1,\ldots,n$.
Nechť $f : \{0,1,\ldots,n\} \to \mathbb{R}^+(= \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\})$, $0 = f(0) \leq \ldots \leq f(n)$. Pro $S \subseteq \{0,1,\ldots,n\}$ klademe

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \notin S \\ f(|S|-1) & \text{pro } 0 \in S\ . \end{cases}$$

a) Pro $n = 2$ spočtěte Shapleyho vektor.
Jen zkouška : b) Spočtěte Shapleyho vektor pro libovolné n.

---

3. termín

1. Dvojice hráčů hraje hru (X, Y, u, v), kde

$$X = Y = [0,1],\ u(x,y) = x(1-xy) \text{ a } v(x,y) = y(1-xy)\ .$$

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.

b) Najděte nějakou rovnovážnou situaci.
c) Je naše hra antagonistická ? Zdůvodněte.

2. Najděte nějakou rovnovážnou situaci pravděpodobnostního rozšíření maticové hry s maticí :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Můžete si pomoci postupným odstraňováním dominovaných strategií.

3. Nechť $n = 3,\ N = \{1, 2, 3\},\ v : 2^N \to \mathbb{R}$

$$v(\emptyset) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,\ v(\{1\}) = a,\ v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1,\ v(\{2,3\}) = b,\ v(N) = 2\,.$$

a) Kdy je to superaditivní hra ?
b) Kdy má neprázdné jádro ?

Teorie her - 2007/08 - 1. termín

1. Dotace II.
i-tý z $n \geq 2$ občanů ČR (nezávisle) určí pro rok 2008 dotaci vládní straně $x_i \in [0, a_i]$, kde a_i je jeho příjem v roce 2007, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nechť c je konstanta meší než všechna $a_1, \ldots, a_n$. Užitečnost kvality života i-tého v roce 2007 bude :

$$(c + \text{ suma vybraných peněz}) \cdot (a_i - x_i) \ .$$

a) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho opatrné strategie. Výsledek zdůvodněte.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ? Výsledek zdůvodněte.

c) Nechť $a_1 = \cdots = a_n$. Najděte nějakou rovnovážnou situaci $x = (x_1, \ldots, x_n)$ splňující $x_1 = \cdots = x_n$.

d) (jen zkouška) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Piráti III.
Posádka $n \geq 2$ pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň tři piráti. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce, kde

$$v(S) = \begin{cases} |S|/3 \text{ pro } |S| \text{ dělitelné } 3 \\ \ldots.. \quad \ldots. \\ \ldots.. \quad \ldots. \end{cases}$$

Spočtěte, prosím, jádro naší hry a její Shapleyho vektor.

Kolokvium : Pokud vám to nejde v plné obecnosti, učiňte tak laskavě alespoň pro $n = 3$ a $n = 4$.

3. Maticová hra.
Řešte prosím maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Teorie her - 2007/08 - 2. termín

1. Platy poslanců II.

Poslanci si mají rozdělit sumu $c > 0$ na své měsíční platy. Všichni současně určí, kolik by kdo chtěl dostávat, nechť pro i-tého ($i \in \{1, \dots, n\}$) je to $x_i \geq 0$. Je-li součet požadavků realizovatelný, jejich přání se splní. V opačném případě se rovnoměrně rozdělí o sumu $\frac{c^2}{x_1 + \cdots + x_n}$.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro i-tého hráče a všechny jeho opatrné strategie.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?

c) Najděte nějakou rovnovážnou situaci (existuje i taková, že $x_1 = \cdots = x_n$).

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.

Jen zkouška :

e) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Piráti IV.

Posádka $n = 3m,\ m \geq 1$, pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Než se však na ostrov dostali, prodělali spoustu bitev. Zůstalo jich m s oběma zdravýma rukama, m majících jen levou ruku v pořádku a m majících jen pravou ruku v pořádku. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň jeden se zdravou levou rukou a alespoň jeden další se zdravou pravou rukou.

Kolokvium : Spočtěte jádro a Shapleyho vektor pro $m = 1$.

Zkouška : Spočtěte jádro a Shapleyho vektor pro $m = 1$ a pro $m = 2$.

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} ,$$

kde $a, b, c, p, q, r > 0$.

a) Najděte všechny opatrné smíšené strategie.

b) Najděte všechny rovnovážné situace ve smíšených strategiích.

Jen zkouška :

c) Řešte hru jako úlohu o dohodě pro $a = 4,\ b = 2,\ c = 1,\ p = 1,\ q = 3,\ r = 6$. Uveďte též, jak se dohoda realizuje.

Teorie her - 2007/8 - 3. termín

1. Dvojice hráčů hraje hru (X, Y, u, v), kde

$$X = Y = [0,1],\ u(x,y) = x(1-x+y) \text{ a } v(x,y) = y(1+x-y)\ .$$

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Najděte nějakou rovnovážnou situaci.
c) Je tato hra antagonistická ?
Jen zkouška : d) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\ ,\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

V bodech a), b) pracujeme se smíšenými strategiemi.
a) Pro prvního hráče najděte dolní a horní hodnotu hry a všechny jeho opatrné strategie.
b) Pro prvního hráče najděte všechny jeho nedominované strategie.
V bodech c), d) pracujeme jen s čistými strategiemi.
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
Jen zkouška : e) Řešte úlohu jako úlohu o dohodě.

3. Uvažujme přiřazovací hru pro m=2. Nechť $M = \{C, D\},\ M' = \{P, Q\}$. Nechť

$$b_{11} - a_1 = p,\ b_{12} - a_1 = q,\ b_{21} - a_2 = r,\ b_{22} - a_2 = s$$

jsou kladná čísla splňující $q, r < p, s$.
a) Spočtěte jádro. V případě neprázdnosti dostanete polovinu bodů již za uvedení vektoru z jádra.
b) Pro prvního prodávajícího najděte jeho složku Shapleyho vektoru.
Kolokvium : počítáme s konkrétními hodnotami $p = 4, q = 1, r = 2, s = 3$.

Teorie her - 2008/9 - 1. termín

1. Uplácení.

Obce $1, \ldots, n$ dostávají na rok 2009 dotace

$$0 < a_1 < \cdots < a_n \ .$$

i-tá obec dává kraji "úplatek" ve výši $x_i \in [0, a_i], \ i = 1, \ldots, n$. Ta, která dala nejvíce dostává "mimořádnou" krajskou dotaci ve výši $(x_1 + \cdots + x_n)/2$. Dalo-li více obcí stejnou sumu, dotaci získává ta z nich, která má nejmenší pořadové číslo.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?

c) Najděte všechny rovnovážné situace.

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.

Jen zkouška :

e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Pravobotci a levobotci.

Hráči: r z nich vlastní jen pravou botu, l z nich vlastní len levou botu. "Výhra" koalice je dána počtem párů bot, které mohou její hráči sestavit. Jedná se o hru ve tvaru charakteristické funkce, kde $v : ... \to ...$ je dáno vztahem …

Kolokvium : Spočtěte jádro pro $r = 2, \ l = 3$ a pro $r = l = 3$ a Shapleyho vektor pro $r = 1, \ l = 3$ a pro $r = 2, \ l = 3$.

Zkouška : Spočtěte jádro pro libovolné r, l a Shapleyho vektor pro $r = 1, \ l = 3$ a pro $r = 2, \ l = 3$.

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \ ,$$

kde $a, b, c, p, q, r > 0$.

a) Najděte všechny opatrné smíšené strategie prvního hráče.

b) Najděte všechny rovnovážné situace ve smíšených strategiích. (Pro kolokvium stačí najít nějakou, která se nesestává z čistých.)

Jen zkouška :

c) Řešte hru jako úlohu o dohodě pro $a = 4, \ b = 2, \ c = 1, \ p = 1, \ q = 3, \ r = 6$. Uveďte též, jak se dohoda realizuje.

Teorie her - 2008/9 - 2. termín

1. Uplácení II.

V Kocourkově se o post starosty ucházejí hráči $1, \ldots, n$. Občané jsou již tak otráveni politikou, že jdou volit pouze za úplatek ve výši 1. Kandidáti nevolí, voliči jsou tak čestní, že přijmou jen jeden úplatek a pak skutečně dají hlas příslušnému kandidátu. Strategií hráče je počet uplacených. Efekt postu starosty je 1000, voličů je dostatek, získá-li více kandidátů stejný počet hlasů, vyhrává ten s nejmenším pořadovým číslem.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
Jen zkouška :
e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Vláčky.

Hráči: l lokomotiv, c vagónů. "Výhra" vlaku je dána počtem vagónů, pokud má alespoň jednu lokomotivu. Jedná se o hru ve tvaru charakteristické funkce, kde $v : ... \to ...$ je dáno vztahem …

Kolokvium : Spočtěte jádro a Shapleyho vektor pro $l = 1,\ c = 3$ a pro $l = 2,\ c = 3$.
Zkouška : Spočtěte jádro pro libovolné l, c a Shapleyho vektor pro $l = 1,\ c = 3$ a pro $l = 2,\ c = 3$.

3. Maticová hra.

Najděte nějakou rovnovážnou situaci maticové hry

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Jen zkouška: formulujte tvrzení umožňující vynechání dominovaných strategií.

Teorie her - 2008/9 - 3. termín

1. Obálky.

Hráči $1, \ldots, n$ současně položí na stůl obálky s jimi zvolenými obnosy $x_1, \ldots, x_n$. Poté se obálky otevřou a vše získá ten, kdo dal nejvíce. Dalo-li více hráčů stejnou sumu, vyhrává ten z nich, kdo má nejmenší poředové číslo.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
Jen zkouška :
e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Hasiči.

U požáru se sejde partička dobrovolných hasičů. Z nich r má redukce k hydrantům, h má navzájem propojitelné díly hadice a s má koncové stříkačky. K sestavení funkční hadice je zapotřebí alespoň jedné redukce a jedné stříkačky, užitek je pak dán její délkou, tj. počtem použitých dílů. Jedná se o hru ve tvaru charakteristické funkce, kde v : ... $\rightarrow$ ... je dáno vztahem $\ldots$

Kolokvium : Spočtěte jádro a Shapleyho vektor pro $r = 1,\ h = 2,\ s = 1$ a pro $r = 1,\ h = 1,\ s = 2$.
Zkouška : Spočtěte jádro pro libovolné r, h, s a Shapleyho vektor pro $r = 1,\ h = 2,\ s = 1$ a pro $r = 1,\ h = 1,\ s = 2$.

3. Bimaticová hra.

Najděte všechny rovnovážnou situace bimaticové hry, jejichž složky jsou smíšené strategie, které nejsou čisté.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

Hledáme $\overline{x},\ \overline{y} \in$ ....
tak, aby $\overline{x}$ maximalizovalo funkci

....

na intervalu ....
a $\overline{y}$ maximalizovalo funkci

....

na intervalu ....
To nastane právě když

....

....
Tedy hledané strategie jsou řešením

....

Jen zkouška: zvolte matice tak, aby úloha měla jediné řešení, nekonečně mnoho řešení, neměla řešení.

Teorie her - 2009/10 - 1. termín

1. Dotace II.

i-tý z $n \geq 2$ občanů ČR (nezávisle) určí pro rok 2008 dotaci vládní straně $x_i \in [0, a_i]$, kde a_i je jeho příjem v roce 2007, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nechť c je konstanta meší než všechna $a_1, \ldots, a_n$. Užitečnost kvality života i-tého v roce 2007 bude :

$$(c + \text{ suma vybraných peněz}) \cdot (a_i - x_i) \ .$$

a) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho opatrné strategie. Výsledek zdůvodněte.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ? Výsledek zdůvodněte.

c) Nechť $a_1 = \cdots = a_n$. Najděte nějakou rovnovážnou situaci $x = (x_1, \ldots, x_n)$ splňující $x_1 = \cdots = x_n$.

d) (jen zkouška) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Volby

V parlamentních volbách dostaly strany C, O, T, K, V po řadě 56,53,41,26 a 24 křesel. Koalice je vítězná, má-li alespoň 101 poslanců. Spočtěte Shapleyho vektor.

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \ ,$$

kde $a, b, c, p, q, r > 0$.

a) Najděte všechny opatrné smíšené strategie.

b) Najděte všechny rovnovážné situace v čistých strategiích a nějakou další rovnovážnou situaci ve smíšených strategiích.

Jen zkouška :

c) Řešte hru jako úlohu o dohodě pro $a = 4,\ b = 2,\ c = 1,\ p = 1,\ q = 3,\ r = 6$. Uveďte též, jak se dohoda realizuje.

Teorie her - 2009/10 - 2. termín

1. Dvojice hráčů hraje hru (X, Y, u, v), kde

$$X = Y = [0,1],\ u(x,y) = x(1-x+y) \text{ a } v(x,y) = y(1+x-y)\ .$$

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Najděte nějakou rovnovážnou situaci.
c) Je tato hra antagonistická ?
Jen zkouška : d) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\ , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

V bodech a), b) pracujeme se smíšenými strategiemi.
a) Pro prvního hráče najděte dolní a horní hodnotu hry a všechny jeho opatrné strategie.
b) Pro prvního hráče najděte všechny jeho nedominované strategie.
V bodech c), d) pracujeme jen s čistými strategiemi.
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
Jen zkouška : e) Řešte úlohu jako úlohu o dohodě.

3. Uvažujme přiřazovací hru pro m=2. Nechť $M = \{C, D\},\ M' = \{P, Q\}$. Nechť

$$b_{11} - a_1 = p,\ b_{12} - a_1 = q,\ b_{21} - a_2 = r,\ b_{22} - a_2 = s$$

jsou kladná čísla splňující $q, r < p, s$.
a) Spočtěte jádro. V případě neprázdnosti dostanete polovinu bodů již za uvedení nějakého vektoru z jádra.
b) Pro prvního prodávajícího najděte jeho složku Shapleyho vektoru.
Kolokvium : počítáme s konkrétními hodnotami $p = 4, q = 1, r = 2, s = 3$.

Teorie her - 2009/10 - 3. termín

1. Platy poslanců II.

Poslanci si mají rozdělit sumu $c > 0$ na své měsíční platy. Všichni současně určí, kolik by kdo chtěl dostávat, nechť pro i-tého ($i \in \{1, \dots, n\}$) je to $x_i \geq 0$. Je-li součet požadavků realizovatelný, jejich přání se splní. V opačném případě se rovnoměrně rozdělí o sumu $\frac{c^2}{x_1+\cdots+x_n}$.
a) Najděte dolní hodnotu hry pro i-tého hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?
c) Najděte nějakou rovnovážnou situaci (existuje i taková, že $x_1 = \cdots = x_n$).
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
Jen zkouška :
e) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Piráti III.

Posádka $n \geq 2$ pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň tři piráti. Každý pirát se může podílet jen na nesení jedné bedny. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce, kde

$$v(S) = \begin{cases} |S|/3 \text{ pro } |S| \text{ dělitelné } 3 \\ \text{.....} \quad \text{....} \\ \text{.....} \quad \text{....} \end{cases}$$

Spočtěte, prosím, jádro naší hry a její Shapleyho vektor.
Kolokvium : Pokud vám to nejde v plné obecnosti, učiňte tak laskavě alespoň pro $n = 3$ a $n = 4$.

3. Maticová hra.

Řešte prosím maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teorie her - 2010/11 - 1. termín

1. Obálky.

Hráči $1, \dots, n$ současně položí na stůl obálky s jimi zvolenými obnosy $x_1, \dots, x_n$. Poté se obálky otevřou a vše získá ten, kdo dal nejvíce. Dalo-li více hráčů stejnou sumu, vyhrává ten z nich, kdo má nejmenší pořadové číslo.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?

c) Najděte všechny rovnovážné situace.

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.

Jen zkouška :

e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Maticová hra.

Řešte prosím maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Přiřazovací hra.

Uvažujme přiřazovací hru pro m=2. Nechť $M = \{C, D\}$, $M' = \{P, Q\}$. Nechť

$$b_{11} - a_1 = p, \ b_{12} - a_1 = q, \ b_{21} - a_2 = r, \ b_{22} - a_2 = s$$

jsou kladná čísla splňující $q, r < p, s$.

a) Spočtěte jádro. V případě neprázdnosti dostanete polovinu bodů již za uvedení vektoru z jádra.

b) Pro prvního prodávajícího najděte jeho složku Shapleyho vektoru.

Teorie her - 2010/11 - 2. termín

1. Uplácení II.

V Kocourkově se o post starosty ucházejí hráči $1, \ldots, n$. Občané jsou již tak otráveni politikou, že jdou volit pouze za úplatek ve výši 1. Kandidáti nevolí, voliči jsou tak čestní, že přijmou jen jeden úplatek a pak skutečně dají hlas příslušnému kandidátu. Strategií hráče je počet uplacených. Efekt postu starosty je 1000, voličů je dostatek, získá-li více kandidátů stejný počet hlasů, vyhrává ten s nejmenším pořadovým číslem.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Piráti IV.

Posádka $n = 3m,\ m \geq 1$, pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Než se však na ostrov dostali, prodělali spoustu bitev. Zůstalo jich m s oběma zdravýma rukama, m majících jen levou ruku v pořádku a m majících jen pravou ruku v pořádku. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň jeden se zdravou levou rukou a alespoň jeden další se zdravou pravou rukou.

Spočtěte jádro a Shapleyho vektor pro $m = 1$ a pro $m = 2$.

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, p, q, r > 0$.

a) Najděte všechny opatrné smíšené strategie prvního hráče.
b) Najděte všechny rovnovážné situace ve smíšených strategiích.
c) Řešte hru jako úlohu o dohodě pro $a = 4,\ b = 2,\ c = 1,\ p = 1,\ q = 3,\ r = 6$. Uveďte též, jak se dohoda realizuje.

Teorie her - 2010/11 - 3. termín

1. Dotace II.
i-tý z $n \geq 2$ občanů ČR (nezávisle) určí pro rok 2011 dotaci vládní straně $x_i \in [0, a_i]$, kde a_i je jeho příjem v roce 2010, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nechť c je konstanta meší než všechna $a_1, \ldots, a_n$. Užitečnost kvality života i-tého v roce 2011 bude :

$$(c + \text{ suma vybraných peněz}) \cdot (a_i - x_i) \ .$$

a) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho opatrné strategie. Výsledek zdůvodněte.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ? Výsledek zdůvodněte.

c) Nechť $a_1 = \cdots = a_n$. Najděte nějakou rovnovážnou situaci $x = (x_1, \ldots, x_n)$ splňující $x_1 = \cdots = x_n$.

d) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Piráti III.
Posádka $n \geq 2$ pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň tři piráti. Každý pirát se může podílet jen na nesení jedné bedny. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce, kde

$$v(S) = \begin{cases} |S|/3 \text{ pro } |S| \text{ dělitelné } 3 \\ \text{.....} \quad \text{....} \\ \text{.....} \quad \text{....} \end{cases}$$

Spočtěte, prosím, jádro naší hry a její Shapleyho vektor.

Pokud vám to nejde v plné obecnosti, učiňte tak laskavě alespoň pro $n = 3$ a $n = 4$.

3. Bimaticová hra.
Najděte všechny rovnovážnou situace bimaticové hry, jejichž složky jsou smíšené strategie, které nejsou čisté.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

Hledáme $\overline{x}$, $\overline{y} \in$ .... tak, aby $\overline{x}$ maximalizovalo funkci

....

na intervalu ....
a $\overline{y}$ maximalizovalo funkci

....

na intervalu ....
To nastane právě když

....

....
Tedy hledané strategie jsou řešením

....

....

Ukažte, že pro $a > c$, $d > b$, $p > q$, $s > r$ má úloha jediné řešení.
....

Teorie her - 2011/2 - 1. termín

1. Obálky.
Hráči $1, \dots, n$ současně položí na stůl obálky s jimi zvolenými obnosy $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Poté se obálky otevřou a vše získá ten, kdo dal nejvíce. Dalo-li více hráčů stejnou sumu, vyhrává ten z nich, kdo má nejmenší pořadové číslo.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
Jen zkouška :
e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Maticová hra.
Řešte prosím maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} ,$$

kde $a, b, c, p, q, r > 0$.

a) Najděte všechny opatrné smíšené strategie prvního hráče.
b) Najděte všechny rovnovážné situace ve smíšených strategiích.
c) Řešte hru jako úlohu o dohodě pro $a = 4,\ b = 2,\ c = 1,\ p = 1,\ q = 3,\ r = 6$. Uveďte též, jak se dohoda realizuje.

Teorie her - 2011/2 - 2. termín

1. Dotace II.

i-tý z $n \geq 2$ občanů ČR (nezávisle) určí pro rok 2012 dotaci vládní straně $x_i \in [0, a_i]$, kde a_i je jeho příjem v roce 2011, $i \in \{1, \dots, n\}$. Nechť c je konstanta meší než všechna $a_1, \dots, a_n$. Užitečnost kvality života i-tého v roce 2012 bude :

$$(c + \text{ suma vybraných peněz}) \cdot (a_i - x_i) \ .$$

a) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho opatrné strategie. Výsledek zdůvodněte.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ? Výsledek zdůvodněte.

c) Nechť $a_1 = \cdots = a_n$. Najděte nějakou rovnovážnou situaci $x = (x_1, \dots, x_n)$ splňující $x_1 = \cdots = x_n$.

d) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Piráti IV.

Posádka $n = 3m,\ m \geq 1$, pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Než se však na ostrov dostali, prodělali spoustu bitev. Zůstalo jich m s oběma zdravýma rukama, m majících jen levou ruku v pořádku a m majících jen pravou ruku v pořádku. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň jeden se zdravou levou rukou a alespoň jeden další se zdravou pravou rukou.

Spočtěte jádro a Shapleyho vektor pro $m = 1$ a pro $m = 2$.

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

Smíšené strategie 1. hráče repezentujeme číslem $x \in [0, 1]$ udávajícím pst hraní 1. řádku. Podobně pro 2. hráče.

a) $\overline{x} = 1,\ \overline{y} = 1$ je rovnovážná, právě když

....

b) $\overline{x} = 1,\ \overline{y} = 0$ je rovnovážná, právě když

....

b) $\overline{x} = 1,\ \overline{y} \in (0.1)$ je rovnovážná, právě když

....

Takové $\overline{y}$ existuje právě když

....

....

d) Nechť $a > c$, $d > b$, $p > q$, $s > r$. najděte všechny rovnovážné situace tvaru $\overline{x} \in (0.1),\ \overline{y} \in (0.1)$.

....

....

Teorie her - 2011/2 - 3. termín

1. Uplácení II.

V Kocourkově se o post starosty ucházejí hráči $1, \ldots, n$. Občané jsou již tak otráveni politikou, že jdou volit pouze za úplatek ve výši 1. Kandidáti nevolí, voliči jsou tak čestní, že přijmou jen jeden úplatek a pak skutečně dají hlas příslušnému kandidátu. Strategií hráče je počet uplacených. Efekt postu starosty je 1000, voličů je dostatek, získá-li více kandidátů stejný počet hlasů, vyhrává ten s nejmenším pořadovým číslem.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Piráti III.

Posádka $n \geq 2$ pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň tři piráti. Každý pirát se může podílet jen na nesení jedné bedny. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce, kde

$$v(S) = \begin{cases} |S|/3 \text{ pro } |S| \text{ dělitelné } 3 \\ \text{.....} \quad \text{....} \\ \text{.....} \quad \text{....} \end{cases}$$

Spočtěte, prosím, jádro naší hry a její Shapleyho vektor.

Pokud vám to nejde v plné obecnosti, učiňte tak laskavě alespoň pro $n = 3$ a $n = 4$.

3. Maticová hra.

Řešte usilovně maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Teorie her - 2012/3 - 1. termín

1. Hlasování o důvěře vládě.

n poslanců (= hráčů) je pro vyslovení důvěry vládě. Tyto hlasy nestačí. Jistý lobbista dokáže zajistit úspěšné hlasování o důvěře za úplatu $c > 0$ (část pro sebe a část pro několik přeběhlíků). Setrvání vlády má pro i-tého ($i = 1, \ldots, n$) efekt $a_i < c$ a i-tý dá před hlasováním lobbistovi obálku s obnosem $x_i \in [0, a_i]$ ($i = 1, \ldots, n$). Peníze se nevrací a platí $a_1 + \cdots + a_n \geq c$.

a) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho opatrné strategie. Výsledek zdůvodněte.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ? Výsledek zdůvodněte.

c) Nechť $a_1 = \cdots = a_n$. Najděte nějakou rovnovážnou situaci $x = (x_1, \ldots, x_n)$ splňující $x_1 = \cdots = x_n$.

d) Najděte všechny situace optimální podla Pareta.

e) (jen zkouška) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Volby

V parlamentních volbách dostaly strany C, K, T, O, Z po řadě 28.3, 17.4, 16.5, 9.3 a 8.4 procent hlasů. Ostatní strany doslaly méně než 5 procent. 200 poslaneckých míst se určí rovnoměrně. Koalice je vítězná, má-li alespoň 101 poslanců. Spočtěte Shapleyho vektor.

3. Piráti V.

Posádka $m \geq 2$ mladých pirátů a $n \geq 2$ starých pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň dva piráti. Mladý pirát se může podílet i na nesení dvou beden, starý se může podílet na nesení bedny jen jednou rukou. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce.

Spočtěte, prosím, jádro naší hry.

(Kolokvium jen pro n sudé.)

Teorie her - 2012/3 - 2. termín

1. Ostrava - 2. dějství.

V posledním hlasování prošel návrh na odkup stadionu o jediný hlas. Opět se našly "procedurální nedostatky" a bude se hlasovat znovu. Ti, co hlasovali pro, jsou již opakovaným hlasováním znechuceni a není jisté, že budou opět pro. Proto si je jistý lobbista pozval na chodbu, kde tito (nezávisle) uvádějí sumy $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, za něž budou opět hlasovat pro. Na úplaty je k dispozici obnos $a > 0$. Je-li $x_1 + \cdots + x_n \leq a$, vyplatí se úplatky, jinak nic.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Piráti VI.

Posádka pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Než se však na ostrov dostali, prodělali spoustu bitev. Zůstalo jich $m \geq 1$, kteří vidí, a $n \geq 1$ slepých. Každý může jít do jeskyně jen jednou, pirát může nést jen jednu bednu, každou bednu nesou dva piráti, z nichž alespoň jeden vidí. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce. Uveďte ji a spočtěte jádro.

3. Maticová hra.

Řešte maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorie her - 20012/13 - 3. termín

1. Platy poslanců II.

Poslanci si mají rozdělit sumu $c > 0$ na své měsíční platy. Všichni současně určí, kolik by kdo chtěl dostávat, nechť pro i-tého ($i \in \{1, \ldots, n\}$) je to $x_i \geq 0$. Je-li součet požadavků realizovatelný, jejich přání se splní. V opačném případě se rovnoměrně rozdělí o sumu $\frac{c^2}{x_1+\cdots+x_n}$.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro i-tého hráče a všechny jeho opatrné strategie.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?

c) Najděte nějakou rovnovážnou situaci (existuje i taková, že $x_1 = \cdots = x_n$).

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.

Jen zkouška :

e) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Piráti III.

Posádka $n \geq 2$ pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň tři piráti. Každý pirát se může podílet jen na nesení jedné bedny. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce, kde

$$v(S) = \begin{cases} |S|/3 \text{ pro } |S| \text{ dělitelné } 3 \\ ..... \quad .... \\ ..... \quad .... \end{cases}$$

Spočtěte, prosím, jádro naší hry.

3. Maticová hra.

Řešte prosím maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Teorie her - 2013/4 - 1. termín

1. Dotace II.

i-tý z $n \geq 2$ občanů ČR (nezávisle) určí pro rok 2012 dotaci vládní straně $x_i \in [0, a_i]$, kde a_i je jeho příjem v roce 2011, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nechť c je konstanta meší než všechna $a_1, \ldots, a_n$. Užitečnost kvality života i-tého v roce 2012 bude :

$$(c + \text{ suma vybraných peněz}) \cdot (a_i - x_i) \ .$$

a) Pro každého z hráčů najděte všechny jeho opatrné strategie. Výsledek zdůvodněte.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ? Výsledek zdůvodněte.

c) Nechť $a_1 = \cdots = a_n$. Najděte nějakou rovnovážnou situaci $x = (x_1, \ldots, x_n)$ splňující $x_1 = \cdots = x_n$.

d) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Piráti IV.

Posádka $n = 3m,\ m \geq 1$, pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Než se však na ostrov dostali, prodělali spoustu bitev. Zůstalo jich m s oběma zdravýma rukama, m majících jen levou ruku v pořádku a m majících jen pravou ruku v pořádku. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést alespoň jeden se zdravou levou rukou a alespoň jeden další se zdravou pravou rukou.

Spočtěte jádro a Shapleyho vektor pro $m = 1$ a pro $m = 2$.

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

Smíšené strategie 1. hráče repezentujeme číslem $x \in [0, 1]$ udávajícím pst hraní 1. řádku. Podobně pro 2. hráče.

a) $\overline{x} = 1,\ \overline{y} = 1$ je rovnovážná, právě když

....

b) $\overline{x} = 1,\ \overline{y} = 0$ je rovnovážná, právě když

....

b) $\overline{x} = 1,\ \overline{y} \in (0.1)$ je rovnovážná, právě když

....

Takové $\overline{y}$ existuje právě když

....

....

d) Nechť $a > c$, $d > b$, $p > q$, $s > r$. najděte všechny rovnovážné situace tvaru $\overline{x} \in (0.1),\ \overline{y} \in (0.1)$.

....

....

Teorie her - 2013/4 - 2. termín

1. Obálky.

Hráči $1, \ldots, n$ současně položí na stůl obálky s jimi zvolenými obnosy $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Poté se obálky otevřou a vše získá ten, kdo dal nejvíce. Dalo-li více hráčů stejnou sumu, vyhrává ten z nich, kdo má nejmenší pořadové číslo.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?

c) Najděte všechny rovnovážné situace.

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.

Jen zkouška :

e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Maticová hra.

Řešte prosím maticovou hry s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} ,$$

kde $a, b, c, p, q, r > 0$.

a) Najděte všechny opatrné smíšené strategie prvního hráče.

b) Najděte všechny rovnovážné situace ve smíšených strategiích.

c) Řešte hru jako úlohu o dohodě pro $a = 4,\ b = 2,\ c = 1,\ p = 1,\ q = 3,\ r = 6$. Uveďte též, jak se dohoda realizuje.

Teorie her - 2013/4 - 3. termín

1. Uplácení II.

V Kocourkově se o post starosty ucházejí hráči $1, \dots, n$. Občané jsou již tak otráveni politikou, že jdou volit pouze za úplatek ve výši 1. Kandidáti nevolí, voliči jsou tak čestní, že přijmou jen jeden úplatek a pak skutečně dají hlas příslušnému kandidátu. Strategií hráče je počet uplacených. Efekt postu starosty je 1000, voličů je dostatek, získá-li více kandidátů stejný počet hlasů, vyhrává ten s nejmenším pořadovým číslem.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.
b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?
c) Najděte všechny rovnovážné situace.
d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.
e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Piráti II.

Posádka $n \geq 2$ pirátù našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formì beden zlata. Každý může jít do jeskyně jen jednou a bednu musí nést dva piráti. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce, kde

$$v(S) = \begin{cases} |S|/2 \text{ pro } |S| \text{ sudé} & \\ \quad\quad ..... & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočtěte, prosím, jádro naší hry. Pokud vám to nejde v plné obecnosti, učiňte tak laskavě alespoň pro $n = 3$ a $n = 4$.

3. Hra ve tvaru charakteristické funkce.

Nechť $n = 3,\ N = \{1, 2, 3\},\ v : 2^N \to \mathbb{R}$,
$v(\emptyset) = 0,\ v(\{1\}) = a,\ v(\{2\}) = b,\ v(\{3\}) = c,\ v(\{1, 2\}) = 2,\ v(\{1, 3\}) = 3,\ v(\{2, 3\}) = 4,\ v(N) = p$.

a) Pro která a, b, c, p je uvedená hra superaditivní ?
b) Pro která a, b, c, p má tato hra neprázdné jádro ?

Teorie her - 2014/5 - 1. termín

1. Uplácení.

Obce $1, \dots, n$ dostávají na rok 2015 dotace $0 < a_1 < \cdots < a_n$. i-tá obec dává kraji "úplatek" ve výši $x_i \in [0, a_i]$, $i = 1, \dots, n$. Ta, která dala nejvíce dostává "mimořádnou" krajskou dotaci ve výši $(x_1 + \cdots + x_n)/2$. Dalo-li více obcí stejnou sumu, dotaci získává ta z nich, která má nejmenší pořadové číslo.

a) Najděte dolní hodnotu hry pro prvního hráče a všechny jeho opatrné strategie.

b) Je naše hra pro $n = 2$ antagonistická ?

c) Najděte všechny rovnovážné situace.

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.

Jen zkouška : e) Najděte všechny nedominované strategie prvního hráče.

2. Piráti VI.

Posádka pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Než se však na ostrov dostali, prodělali spoustu bitev. Zůstalo jich $m \geq 1$, kteří vidí, a $n \geq 1$ slepých. Každý může jít do jeskyně jen jednou, pirát může nést jen jednu bednu, každou bednu nesou dva piráti, z nichž alespoň jeden vidí. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce. Uveďte ji a spočtěte jádro. Kolokvium: řešte jen případ $m \geq n$.

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

Smíšené strategie 1. hráče repezentujeme číslem $x \in [0, 1]$ udávajícím pst hraní 1. řádku. Podobně pro 2. hráče.

a) $\overline{x} = 1$, $\overline{y} = 1$ je rovnovážná, právě když

....

b) $\overline{x} = 1$, $\overline{y} = 0$ je rovnovážná, právě když

....

c) (Jen zkouška.) Neexistuje rovnovážná v čistých stategiích, právě když

buď ....

nebo ....

d) $\overline{x} = 1$, $\overline{y} \in (0, 1)$ je rovnovážná, právě když

....

....

e) (Jen zkouška.) Existuje-li takové $\overline{y}$, má hra rovnovážnou situaci i v čistých strategiích. Dokažte.

....

....

f) Nechť $a < c$, $d < b$, $p > q$, $s > r$. Najděte všechny rovnovážné situace tvaru $\overline{x} \in (0, 1)$, $\overline{y} \in (0, 1)$.

....

....

Teorie her - 2014/5 - 2. termín

1. Platy poslanců.

n poslanců si má rozdělit sumu c na své měsíční platy. Všichni současně určí, kolik by kdo chtěl dostávat. Je-li součet požadavků realizovatelný, jejich přání se splní. V opačném případě se rovnoměrně rozdělí o sumu $c/2$.

a) Najděte normální formu této hry.

b) Najděte dolní hodnotu hry pro i-tého hráče a všechny jeho opatrné strategie.

c) Najděte nějakou rovnovážnou situaci (existuje i taková, že $x_1 = \cdots = x_n$).

d) Najděte všechny situace optimální podle Pareta.

Jen zkouška : e) Najděte všechny nedominované strategie i-tého hráče.

2. Piráti II.

Posádka $n \geq 2$ pirátů našla v jeskyni pustého ostrova obrovský poklad ve formě beden zlata. Každý může jít do jeskyně jen jednou, může se podílet jen na nesení jediné bedny a bednu musí nést dva piráti. To vede na hru v ve tvaru charakteristické funkce, kde

$$v(S) = \begin{cases} |S|/2 \text{ pro } |S| \text{ sudé} \\ \qquad ..... \qquad\qquad \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočtěte, prosím, jádro naší hry. Kolokvium: stačí pro $n = 3$ a $n = 4$.

3. Bimaticová hra.

Je dána bimaticová hra s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \quad ,$$

kde $a, b, c, p, q, r > 0$.

a) Najděte všechny opatrné smíšené strategie prvního hráče.

b) Najděte všechny rovnovážné situace ve smíšených strategiích.

Kolokvium : Nemusíte dokazovat, že máte opravdu všechny.