Své postupy i svá rozhodnutí zdůvodňujte!

1. (10 bodů) Pro těleso $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$ popište Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Kolik má těleso K kvadratických podtěles, tj. podtěles L s vlastností $[L : \mathbb{Q}] = 2$?

2. (3 × 10 bodů) Jsou dány polynomy

   (a) $f_1 = x^3 + 2$;
   (b) $f_2 = x^4 - 4x^2 + 2$;
   (c) $f_3 = x^6 + 3$.

   Pro každé $i = 1, 2, 3$ popište rozkladové těleso K_i polynomu f_i, jeho Galoisovu grupu $\mathrm{Gal}(K_i/\mathbb{Q})$ a svaz všech podtěles tělesa K_i.

3. (10 bodů) Uvažme devadesáté první kruhové těleso $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, kde $\zeta = \cos\frac{2\pi}{91} + i\sin\frac{2\pi}{91}$. Nechť $\alpha = \zeta + \zeta^{16} + \zeta^{74}$ a $\beta = \zeta + \zeta^{9} + \zeta^{81}$.

   (a) Určete každý ze stupňů rozšíření $[K : \mathbb{Q}(\alpha)]$, $[K : \mathbb{Q}(\beta)]$, $[K : \mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta)]$, $[K : \mathbb{Q}(\alpha, \beta)]$.
   (b) Rozhodněte, zda je Galoisova grupa $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta))$ komutativní.
   (c) Rozhodněte, zda je Galoisova grupa $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta))$ cyklická.

4. (10 bodů) Nechť $(G, \cdot)$ je Hausdorffovská topologická grupa, $H \subseteq G$ její podgrupa, přičemž H je komutativní.

   (a) Dokažte, že uzávěr $\overline{H}$ podgrupy H je také komutativní.
   (b) Rozhodněte, zda toto tvrzení platí i bez předpokladu, že G je Hausdorffovská.

5. (10 bodů) Nechť $K = \mathbb{F}_2(x)$ je těleso racionálních funkcí nad dvojprvkovým tělesem $\mathbb{F}_2$.

   (a) Dokažte, že pro libovolnou matici $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ existuje automorfismus $\sigma_A : K \to K$ splňující podmínku $\sigma_A(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.
   (b) Dokažte, že $G = \{\sigma_A;\ A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)\}$ tvoří vzhledem ke skládání grupu, která je izomorfní s $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.
   (c) Popište podtěleso $L \subseteq K$ takové, že K/L je konečné normální separabilní rozšíření s Galoisovou grupou G.
   (d) Nalezněte vhodné $\beta \in K$ tak, aby $L = \mathbb{F}_2(\beta)$.
   (e) Nakreslete svaz všech těles M, splňujících $L \subseteq M \subseteq K$, a vyznačte stupně rozšíření mezi každými zakreslenými tělesy, které jsou v inkluzi.

   (Pro výpočet stupňů rozšíření můžete při řešení užít větu: *Nechť F je těleso a t je transcendentní nad F. Nechť $f(t)$, $g(t)$ jsou nenulové nesoudělné polynomy z $F[t]$, z nichž je alespoň jeden nekonstantní. Pak platí* $\left[F(t) : F\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)\right] = \max\{\deg f(t), \deg g(t)\}$.)