Hyperbolické rovnice

Hyperbolická rovnice, kterou se nyní budeme zabývat má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

nebo ve dvou prostorových proměnných

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

Opět hledáme funkci $u(t, x)$, která je funkcí času t a prostorové souřadnice x. Rovnice (1) se často nazývá vlnová rovnice. Ve fyzice se totiž touto rovnicí popisuje šíření vlnění, například na napnuté struně. Funkce $u(t, x)$ potom reprezentuje výchylku struny z rovnovážné polohy v čase t a v místě x. Konstanta a představuje rychlost šíření vlny po struně.
Vlnová rovnice pro strunu je pohybová rovnice - říká nám, že zrychlení úseku struny ($\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$) je úměrné síle, která na něj působí. Tam, kde má výchylka struny zápornou druhou derivaci, je struna urychlována směrem dolů a naopak.
Pro řešení rovnice je třeba zadat oblast řešení, okrajové a počáteční podmínky stejně jako u parabolické rovnice. Zadání počátečních podmínek se ale liší od parabolických rovnic. Na počátku nestačí zadat hodnoty funkce $u(t, x)$, např. výchylku struny. Je třeba též zadat hodnotu derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$, tj. např. rychlost pohybu struny na počátku. Počáteční podmínky mají tedy tvar

$$u(0, x) = p(x) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = q(x) \tag{4}$$

Metoda sítí pro hyperbolické rovnice

Konstrukce sítě je stejná jako v případě parabolické rovnice.

Explicitní metoda

Nejjednodušší je opět explicitní metoda. Při této metodě použijeme následující aproximace derivací

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \tag{6}$$

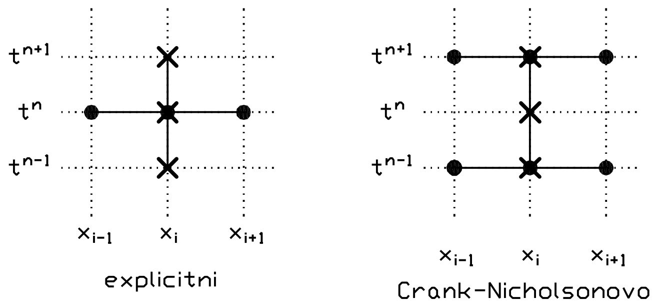
Dosazením do (1) dostaneme diferenční rovnici pro u_i^n

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \tag{7}$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit u_i^{n+1}

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{8}$$

Tato rovnice nám umožňuje vypočítat řešení v čase t^{n+1} z řešení v čase t^n a t^{n-1}. Oproti parabolickým rovnicím nestačí tedy znát jeden předchozí krok, ale je třeba



Obrázek 1: Schemata pro řešení hyperbolické rovnice.

znát předchozí kroky dva. To je problém na začátku, kdy potřebujeme inicializovat první dvě řešení pomocí počátečních podmínek. První časovou vrstvu získáme přímo z počáteční podmínky

$$u_i^0 = p(x_i) \tag{9}$$

Řešení v druhém čase získáme pomocí počáteční hodnoty a derivace za předpokladu, že derivace (rychlost struny) je konstantní

$$u_i^1 = p(x_i) + \tau q(x_i) \tag{10}$$

Tato explicitní metoda pro hyperbolické rovnice je pouze podmíněně stabilní. K zajištění stability je třeba aby platilo tzv. *Courantovo-Friedrichsovo-Lewyho kritérium*

$$\tau \leq \frac{h}{|a|} \tag{11}$$

Díky tomu, že v této podmínce je pouze první mocnina h, není tato podmínka tak omezující jako podmínka pro explicitní metodu u parabolických rovnic.
Řešení viz program `pdr-hyperb-expl.f90`.

Crankovo-Nicholsonovo schéma

Dokonalejší než explicitní metoda jsou opět metody implicitní, protože odstraňují nutnost podmínky stability. Základní implicitní metoda, která je symetrická v čase je Crankova-Nicholsonova metoda. Tato místo aproximace prostorové derivace v čase t^n používá průměr z derivací v časech t^{n+1} a t^{n-11}. Místo (6) tedy použijeme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{h^2}\right) \tag{12}$$

Výsledné schéma tedy je

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = a^2\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2h^2} + a^2\frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{2h^2} \tag{13}$$

Opět jsme získali soustavu lineárních rovnic. Zavedeme značení

$$\sigma \equiv \frac{a\tau}{h} \tag{14}$$

a soustavy upravíme

$$-\frac{\sigma^2}{2}u_{j-1}^{n+1} + (1+\sigma^2)u_j^{n+1} - \frac{\sigma^2}{2}u_{j+1}^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{\sigma^2}{2}(u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) \tag{15}$$

Matice této soustavy je velice podobná matici soustavy pro Crankovo-Nicholsonovo schéma u parabolických rovnic.