Eliptické rovnice

Budeme se zabývat eliptickými rovnicemi ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1}$$

V případě eliptických rovnic hledáme funkci $u(x, y)$, která je funkcí dvou prostorových proměnných x a y. Nemáme zde žádnou proměnnou s významem času. Funkce $f(x, y)$ je známá zadaná funkce. Takováto eliptická rovnice se také nazývá Poissonova rovnice. V případě, že pravá strana rovnice je nulová mluvíme o Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

Jako fyzikální příklad lze uvést rovnici pro elektrostatický potrnciál φ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

kde $\varrho(x, y)$ je hustota náboje. Eliptické rovnice také vznikají jako stacionární řešení parabolické rovnice. Pokud se totiž řešení parabolické rovnice již nemění, tj. časová derivace je nulová, dostaneme rovnici (2). Tak dostaneme např. rovnici pro stacionární rozložení teploty $T(x, y)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = q(x, y) \tag{4}$$

kde $q(x, y)$ je dané rozložení tepelných zdrojů.
Díky tomu, že u eliptických rovnic není proměnná s významem času, nejsou zde žádné počáteční podmínky. Je třeba zadat oblast na které budeme hledat řešení. V našem případě dvou prostorových proměnných to bude část roviny. My se omezíme na nejjednodušší případ, kdy oblastí řešení je obdélník. Na hranicích oblasti řešení je třeba zadat okrajové podmínky. Okrajové podmínky mohou být několika druhů stejně jako u parabolických a hyperbolických rovnic.

Metoda sítí pro eliptické rovnice

V oblasti řešení sestrojíme nejprve síť. Naše síť bude opět pravoúhlá a rovnoměrná. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že krok sítě je v obou směrech stejný a má velikost h

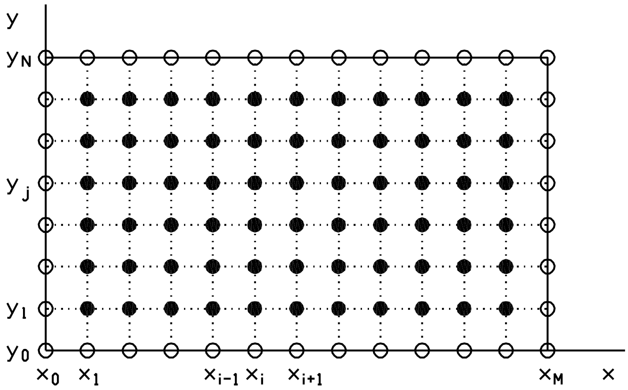
$$x_i = ih \qquad i = 0, 1, \ldots, M \tag{5}$$

$$y_j = jh \qquad j = 0, 1, \ldots, N \tag{6}$$

Místo spojitého řešení $u(x, y)$ budeme opět hledat jeho odhady $u_{i,j}$ tak aby přibližně bylo $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$.
Derivace v rovnici (1) nahradíme přibližnými vzorci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \tag{8}$$



Obrázek 1: Konstrukce rovnoměrné ortogonální sítě.

a dostaneme

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f_{ij} \tag{9}$$

po malé úpravě máme

$$u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{i,j} = h^2 f_{ij} \tag{10}$$

Získali jsme soustavu lineárních rovnic pro neznámé hodnoty u_{ij}. Hledané hodnoty u_{ij} tvoří matici. Abychom mohli vyjádřit soustavu (10) v maticovém zápisu je třeba hodnoty u_{ij} seřadit do vektoru. Lze postupovat po řádcích, tak dostaneme vektor

$$\boldsymbol{u} = (u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0N}, u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1N}, u_{20}, \ldots, u_{MN}) \tag{11}$$

Pokud máme hledané proměnné takto seřazeny je matice soustavy tzv. blokově třídiagonální matice. Příklad takové matice je na obr. 2 (kvůli přehlednosti tečky značí nulu). V každém řádku této matice je nejvýše 5 nenulových prvků, které odpovídají pěti členům rovnice (10). Na diagonále je vždy 4 odpovídající prostřednímu prvku u_{ij}. Hodnoty -1 odpovídají sousedním prvků. U rovnic, které odpovídají vnitřním uzlům sítě a které tedy mají čtyři sousedy, jsou v řádku čtyři -1. U rovnic, které odpovídají hraničním resp. rohovým bodům jsou -1 jen tři resp. dvě.
Blokově třídiagonální matice je příkladem tzv. řídké matice. Řídké matice jsou matice, jejichž většina prvků je nulová. Řešení soustavy s takovouto maticí pomocí přímých metod je zbytečně obtížné. Během řešení se totiž nulové prvky nahradí nenulovými a řídkost matice se nijak nevyužije. Pro řešení se využívají iterační metody. Jacobiova metoda pro soustavu (10) je velice jednoduchá

$$u_{i,j}^{(n+1)} = -\frac{h^2}{4} f_{ij} + \frac{1}{4}(u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)}) \tag{12}$$

Gaussova-Seidelova metoda pro stejnou soustavu je

$$u_{i,j}^{(n+1)} = -\frac{h^2}{4} f_{ij} + \frac{1}{4}(u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)}) \tag{13}$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
4 & -1 & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
-1 & 4 & -1 & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & -1 & 4 & -1 & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & -1 & 4 & . & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\hline
-1 & . & . & . & 4 & -1 & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & -1 & . & . & -1 & 4 & -1 & . & . & -1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & -1 & . & . & -1 & 4 & -1 & . & . & -1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & -1 & . & . & -1 & 4 & . & . & . & -1 & . & . & . & . \\
\hline
. & . & . & . & -1 & . & . & . & 4 & -1 & . & . & -1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & -1 & . & . & -1 & 4 & -1 & . & . & -1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & -1 & . & . & -1 & 4 & -1 & . & . & -1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & -1 & 4 & . & . & . & -1 \\
\hline
. & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & . & 4 & -1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & -1 & 4 & -1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & -1 & 4 & -1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -1 & . & . & -1 & 4
\end{array}\right]
$$

Obrázek 2: Blokově třídiagonální matice.