

Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

Štatistická inferencia I a II

Sylabus ZS-2016 a JS-2017

Stanislav Katina

katina@math.muni.cz

3. marca 2017

Sylabus predmetu Štatistická inferencia I a II

1. **Širšie chápanie matematickej štatistiky:** plánovanie (dizajn) štúdie – systematický prehľad, plánovanie rozsahu súboru, efekty (parametre), ciele, hypotézy (bio-medicínska a štatistická forma; voľba hypotézy z troch typov – obojstranná a dve jednostranné), štatistický model a model rozdelenia pravdepodobnosti, interpretácie výsledkov (štatistická a bio-medicínska forma)
2. **Základné pojmy a definície:** náhodný výber, náhodná premenná (+príklady), náhodný vektor (+príklady), štatistická inferencia (definícia), iid, srs, jednoduchý náhodný výber bez vrátenia a s vrátením, diskretná a spojitá náhodná premenná (+príklady), distribučná funkcia diskkrétnej a spojitej náhodnej premennej, hustota diskkrétnej a spojitej náhodnej premennej; výberový priestor, parametrický priestor, nosič (aj anglické názvy)
3. **Model rozdelenia pravdepodobnosti a štatistický model:** typy modelov, parametrický a neparametrický model (definície), parameter a vektor parametrov (definícia + príklady), spojité rozdelenia – normálne, štandardizované normálne, dvojrozmerné normálne, štandardizované dvojrozmerné normálne rozdelenie; diskretné – binomické, multinomické, súčinové multinomické, Poissonovo, mnohorozmerné Poissonovo, negatívne binomické rozdelenie (definície, zobrazovanie + príklady); aproximácie (odlišnosti od teoretického rozdelenia na príklade normálneho rozdelenia; binomického rozdelenia normálnym, binomického rozdelenia Poissonovým, multinomického rozdelenia mnohorozmerným Poissonovým); over- a underdispersion (overdispersion v binomickom modeli, underdispersion v binomickom modeli, overdispersion v Poissonovom modeli + príklady), hypergeometrické a mnohorozmerné hypergeometrické rozdelenie (+ príklady), zmes dvoch normálnych (jedno a viacrozmerných) rozdelení (+ príklady)
4. **Simulačný experiment:** MC experiment a jeho história, 3 kritériá simulačného experimentu, CLV, slabý a silný ZVČ; generovanie pseudonáhodných čísel; 5 typov simulačných experimentov (a) simulačný experiment rozdelenia náhodnej premennej (princípy + príklady), (b) simulačný experiment aproximácie nejakého rozdelenia náhodnej premennej iným rozdelením (princípy + príklady), (c) simulačný experiment rozdelenia štatistiky (princípy + príklady), (d) simulačný experiment rozdelenia testovacej štatistiky (princípy + príklady), (e) simulačný experiment vlastností intervalu spoľahlivosti (princípy + príklady)
5. **Štatistika:** štatistika, postačujúca štatistika a testovacia štatistika (definície a príklady napr. pre binomické a normálne rozdelenie)
6. **Funkcia vierohodnosti – teoretická časť:** definícia funkcie vierohodnosti, prirodzený logaritmus funkcie vierohodnosti, odhadnutá a profilová vierohodnosť, jadro vierohodnosti, slabý a silný princíp vierohodnosti a ich využitie v praxi (príklad), štatistická teória, maximálne vierohodný odhad parametra; definície funkcií vierohodnosti – normálneho, dvojrozmerného normálneho, štandardizovaného normálneho, štandardizovaného dvojrozmerného normálneho, binomického, Poissonovho, multinomického rozdelenia; maximálne vierohodné odhady parametrov – normálneho, dvojrozmerného normálneho, štandardizovaného normálneho, štandardizovaného dvojrozmerného normálneho, binomického, Poissonovho, multinomického rozdelenia; aproximácia funkcie vierohodnosti alebo jej logaritmu nejakou funkciou (+ dôležitosť polohy maxima a zakrivenie v maxime) [pre parameter ako skalár a parameter ako vektor]; skóre funkcia, vierohodnostné (skóre) rovnice, (pozorovaná) Fisherova miera informácie, hessián, maximálne vierohodný odhad rozptylu (definície + príklady pre jednotlivé rozdelenia), Taylorov

rozvoj r -tého rádu, Taylorova veta, kvadratická aproximácia logaritmu funkcie vierohodnosti pomocou Taylorovho rozvoja druhého rádu, relatívna (štandardizovaná) vierohodnosť, kvadratická aproximácia logaritmu relatívnej funkcie vierohodnosti pomocou Taylorovho rozvoja druhého rádu; dva spôsoby kontroly vhodnosti kvadratickej aproximácie funkcie vierohodnosti – pomocou relatívnej vierohodnosti a skóre funkcie (+ príklad binomického a normálneho rozdelenia) [pre parameter ako skalár a parameter ako vektor]; profilová a odhadnutá funkcia vierohodnosti a jej zakrivenie; invariantnosť maximálne vierohodného odhadu, kvadratická aproximácia profilovej a odhadnutej vierohodnosti [pre parameter ako skalár a parameter ako vektor]; invariantnosť maximálne vierohodného odhadu, delta metóda [pre parameter ako skalár a parameter ako vektor]

7. **Funkcia vierohodnosti – numerická časť:** maximalizácia funkcie vierohodnosti; Newtonova (Newton-Raphsonova) metóda (metóda dotyčníc) pre parameter ako skalár – kvadratická aproximácia využívaná algoritmom, iteračná funkcia, iteračný algoritmus, prahová hodnota, zastavenie algoritmu, geometrická interpretácia, implementácia v \mathbb{R} ; metóda zlatého rezu a metóda sukcesívnej parabolickej interpolácie; Newtonova (Newton-Raphsonova) metóda (metóda dotyčníc) pre parameter ako vektor – kvadratická aproximácia využívaná algoritmom, iteračná funkcia, iteračný algoritmus, prahová hodnota, zastavenie algoritmu, geometrická interpretácia, implementácia v \mathbb{R} , Fisherova skóringová metóda, quasi Newtonova metóda, centrálna rozdielová aproximácia, BFGS metóda, Nelder-Meadova metóda (metóda simplexov) – geometrická interpretácia, implementácia v \mathbb{R} ; princípy aproximácie skóre funkcie a hessiánu [príklady + zobrazovanie; napr. pre normálne a dvojrozmerné normálne rozdelenie, pre binomické a trinomické rozdelenie]
8. **Praktické dôsledky odchýlok od normality:** tri odporúčania – (a) transformácia dát, (b) urezávanie a winsorizácia a (c) nahradenie asymptotického rozdelenia testovacej štatistiky bootstrapovým alebo permutačným rozdelením
9. **Charakteristiky polohy a variability:** stredná hodnota, výberový aritmetický priemer, aritmetický priemer; rozptyl, výberový rozptyl, odhad rozptylu; koeficient variácie a jeho rozptyl; poriadkové štatistiky; medián, výberový medián, odhad mediánu; percentily, výberové percentily, odhad percentilov, kvantily, výberové kvantily, odhady kvantilov; dolný a horný kvartil, výberový dolný a horný kvartil, odhad dolného a horného kvartilu; rozptyl poriadkovej štatistiky (všeobecne a za platnosti normality), stredná (očakávaná) hodnota mediánu a rozptyl mediánu (všeobecne a za platnosti normality); distribučná funkcia a jej interval spoľahlivosti
10. **Testovanie hypotéz 1:** štatistická inferencia, štatistický test, liberálny a konzervatívny štatistický test, nulová a alternatívna hypotéza (definícia, obojstranná a dve jednostranné), oblasť (obor) nezamietania nulovej hypotézy a oblasť (obor) zamietania nulovej hypotézy (pre testovaciu štatistiku, pre parameter, pre náhodnú premennú), tabuľka rozhodovania voči skutočnosti, chyba prvého druhu a jej pravdepodobnosť, chyba druhého druhu a jej pravdepodobnosť, hladina významnosti, koeficient spoľahlivosti, sila testu, silofunkcia, pravdepodobnosť pokrytia, Neyman-Pearsonov prístup; kvantil a kritická hodnota (definícia všeobecne a pre nasledovné rozdelenia – normálne, štandardizované normálne, χ^2 , Studentovo a Fisherovo), stupne voľnosti (definícia + príklady pre spojitý a diskretný prípad), rovnomerne najsilnejší test, monotónny pomer vierohodnosti (príklad – binomické a normálne rozdelenie), rovnomerne najsilnejší test pre jednostrannú alternatívu (príklad – binomické a normálne rozdelenie)

11. **Testovacie štatistiky:** relatívna (štandardizovaná) vierohodnosť, jednoduchý pomer vierohodnosti, testovacia štatistika pomerom vierohodnosti, aproximácie testovacej štatistiky pomerom vierohodnosti – Waldova testovacia štatistika a skóre testovacia štatistika (odvodenie + geometrická interpretácia), asymptotické rozdelenia testovacích štatistík (pre parameter ako skalár a parameter ako vektor), testy všetkých parametrov a testy podmnožiny parametrov; tri testovacie štatistiky za predpokladu normality $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 je známe (odvodenie a asymptotické rozdelenie)
12. **Intervaly spoľahlivosti – teoretická a numerická časť:** interval spoľahlivosti (IS; definícia, obojstranný a dva jednostranné IS, zovšeobecnenia na elipsu a elipsoid spoľahlivosti), empirický IS, koeficient spoľahlivosti, liberálny a konzervatívny IS; porovnanie IS a tolerančného intervalu; Waldov IS, spätne transformovaný Waldov IS, skóre IS, vierohodnostný IS; výpočet hraníc vierohodnostného IS – metóda bisekcie – iteračná funkcia, iteračný algoritmus, prahová hodnota, zastavenie algoritmu, tri typy aproximačnej chyby, implementácia v \mathbb{R} , Brentova metóda (Brent-Dekkerova metóda), metóda sečníc – princíp, geometrická interpretácia, implementácia v \mathbb{R}
13. **Asymptotické vlastnosti odhadov:** bodový odhad, konvergencia skoro všade, konvergencia v kvadratickom strede, konvergencia podľa pravdepodobnosti, konvergencia v distribúcii, nevychýlený odhad, lepší odhad, asymptoticky nevychýlený odhad, konzistentný odhad, asymptoticky eficientný odhad, asymptoticky normálny odhad; príklady odhadov z normálneho a mnohorozmerne normálneho rozdelenia, koeficient variácie, zmena parametrizácie
14. **Testovanie hypotéz 2:** testovanie H_0 oproti H_1 , test, testovacie kritérium, testovanie pomocou kritického oboru, testovanie pomocou intervalu spoľahlivosti, testovanie pomocou pozorovanej hladiny významnosti, p-hodnota, štatistická signifikancia, hraničná štatistická signifikancia, konzervatívny a liberálny test, konzervatívny a liberálny interval spoľahlivosti
15. **Asymptotické testy o parametroch:**
 - (a) Jednovýberové testy: asymptotické testy strednej hodnoty, asymptotické testy o rozptyle, asymptotické testy o korelačnom koeficiente, asymptotické testy o pravdepodobnosti.
 - (b) Dvojvýberové testy: asymptotické testy rozdielu stredných hodnôt, asymptotické testy o podiele rozptylov, asymptotické testy o rozdiel korelačných koeficientov, asymptotické testy o dvoch pravdepodobnostiach.
 - (c) Viacvýberové testy: asymptotické testy o viacerých stredných hodnotách, asymptotické testy o viacerých rozptyloch, asymptotické testy o viacerých korelačných koeficientoch, asymptotické testy o viacerých pravdepodobnostiach.

Teória k jednotlivým testovacím procedúram:

- (a) Definícia testovacej štatistiky a jej názov, definícia hypotéz (H_{01} vs H_{11} , H_{02} vs H_{12} a H_{03} vs H_{13}), definícia kritických oborov (\mathcal{W}_1 , \mathcal{W}_2 a \mathcal{W}_3), definícia silofunkcií, definícia p-hodnoty, definícia Waldovho a vierohodnostného IS.
- (b) Odvodenie silofunkcie, minimálneho rozsahu súboru, Waldovej testovacej štatistiky (hlavné črty odvodenia), testovacej štatistiky pomerom vierohodnosti (hlavné črty odvodenia) a skóre testovacej štatistiky (hlavné črty odvodenia).
- (c) Waldove IS, skóre IS a IS pomerom vierohodnosti (hlavné črty odvodenia)

Simulačné štúdie k jednotlivým testovacím procedúram a intervalom spoľahlivosti:

- (a) Simulačné štúdie o asymptotických vlastnostiach testovacích štatistík za platnosti H_0 .
- (b) Simulačné štúdie o asymptotických vlastnostiach testovacích štatistík za platnosti H_1 .
- (c) Simulačné štúdie o asymptotických vlastnostiach IS.

16. **Príklady aplikácií:** biológia, antropológia, medicína, poisťovníctvo a bankovníctvo a pod.