Jaroslav Švrček – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

O geometrických nerovnostech

Přírodověcká fakulta MU Brno (20. dubna 2017)

a) Trojúhelníková nerovnost (TN),

b) Weizenböckova nerovnost (Hadwiger–Finslerova nerovnost),

c) Neuberg–Pedoeova nerovnost,

d) Eulerova nerovnost,

e) Erdös–Mordellova nerovnost.

Aplikace TN

Příklad 1

Nechť t_a, t_b, t_c jsou délky těžnic a o obvod libovolného trojúhelníku. Dokažte, že platí nerovnosti

$$\frac{4}{3}\left(t_a + t_b + t_c\right) > o > t_a + t_b + t_c.$$

Příklad 2

Dokažte, že součet délek dvou úseček spojujících středy protilehlých stran v libovolném konvexním čtyřúhelníků je menší než součet délek obou jeho úhlopříček.

Příklad 3

Jsou-li úhlopříčky v libovolném lichoběžníku navzájem kolmé, je součet délek jeho základen menší menší než součet délek obou jeho ramen. Dokažte.

Příklad 4

Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníku. Dokažte, že platí nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca.$$

Příklad 5

Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníku ABC. Dokažte, že platí nerovnosti

- $3a^2 + 2bc > 2ab + 2ac.$
- $a^2 + b^2 + c^2 > \dfrac{2}{3}\left(ab + bc + ca\right).$

Příklad 6 (36. Turnaj měst, podzim 2014)

Dokažte, že v každém tečnovém mnohoúhelníku existují tři jeho strany, z nichž lze sestrojit trojúhelník.

Příklad 7

Dokažte, že v každém konvexním pětiúhelníku existují tři jeho úhlopříčky, z nichž lze sestrojit trojúhelník.

Příklad 8 (10. IMO, Moskva, 1968)

Dokažte, že v každém čtyřstěnu existují tři hrany, které vycházejí z jednoho vrcholu, z nichž je možno sestrojit trojúhelník.

Weizenböckova nerovnost, některé analogie a její zobecnění

Nerovnost 1 (Roland Weizenböck)

V každém trojúhelníku platí (při obvyklém označení jeho hlavních prvků) nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}.$$

Rovnost nastane, právě když uvažovaný trojúhelník je rovnostranný.

Nerovnost 2

V každém trojúhelníku platí nerovnost

$$3a^2 + 3b^2 - c^2 \geq 4P\sqrt{3}.$$

Rovnost nastane, právě když platí $a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{3}$.

Nerovnost 3

V každém trojúhelníku platí nerovnost

$$9a^2 + 5b^2 - 3c^2 \geq 4P\sqrt{3}.$$

Rovnost nastane, právě když platí $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7}$.

Nerovnost 4 (Hugo Hadwiger, Paul Finsler, 1937)

V každém trojúhelníku platí (při obvyklém označení jeho hlavních prvků) nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Rovnost nastane, právě když uvažovaný trojúhelník je rovnostranný.

Nerovnost 5

V každém trojúhelníku platí (při obvyklém označení jeho hlavních prvků) nerovnost

$$ab + bc + ca \geq 4P\sqrt{3}.$$

Rovnost nastane, právě když uvažovaný trojúhelník je rovnostranný.

Neuberg–Pedoeova nerovnost

Nerovnost 6 (Joseph J. B. Neuberg, Daniel Pedoe, 1942)

Nechť ABC je trojúhelník o stranách a, b, c a obsahu P a UVW trojúhelník o stranách u, v, w a obsahu Q. Pak platí nerovnost

$$a^2(-u^2+v^2+w^2)+b^2(u^2-v^2+w^2)+c^2(u^2+v^2-w^2) \geq 16PQ.$$

Rovnost nastane, právě když jsou trojúhelníky podobné.

Poznámka 1.

Nerovnost byla použita ve 29. ročníku MO (kategorie A).

Poznámka 2.

Položíme-li v Neuberg–Pedoeově nerovnosti $a = u$, $b = v$, $c = w$, a tudíž $P = Q$, dostáváme s využitím nerovnosti

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3\left[2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-(a^4+b^4+c^4)\right]$$

bezprostředně Weizenböckovu nerovnost

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4P\sqrt{3}.$$

Nerovnost 7 (Ono, 1914; Balitrand, 1916)

V libovolném *ostroúhlém* trojúhelníku platí nerovnost

$$27(-a^2+b^2+c^2)^2(a^2-b^2+c^2)^2(a^2+b^2-c^2)^2 \leq (4P)^6.$$

<u>Eulerova nerovnost</u>

Nerovnost 8 (Leonhard Euler)

Nechť r je poloměr kružnice opsané a ρ poloměr kružnice vepsané libovolnému trojúhelníku. Pak platí nerovnost

$$r \geq 2\rho.$$

Rovnost nastane, právě když je uvažovaný trojúhelník rovnostranný.

Poznámka.

Eulerova nerovnost je přímým důsledkem formule udávající vzdálenost d středů kružnice opsané a vepsané v libovolném trojúhelníku

$$d^2 = r^2 - 2r\rho.$$

Důsledek

Nechť α, β, γ značí velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC. Dokažte, že platí nerovnost

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma,$$

přičemž rovnost nastane, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník.

Erdös–Mordellova nerovnost

Nerovnost 9 (Paul Erdös, Louis Joel Mordell, 1935)

Nechť P je libovolný bod trojúhelníku ABC. Dále nechť u, v, w jsou po řadě vzdálenosti bodu P od jeho stran a, b, c. Pak platí

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq 2(u + v + w),$$

přičemž rovnost nastane, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník a P je jeho těžiště.

Poznámka. První elementární důkaz podal v r. 1945 americký matematik Nicolas D. Kazarinoff.

Nerovnost 10

Nechť P je libovolný bod trojúhelníku ABC. Dále nechť u, v, w jsou po řadě vzdálenosti bodu P od jeho stran a, b, c. Pak platí

$$|PA| \cdot |PB| \cdot |PC| \geq 8\, uvw.$$

Rovnost nastane, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník a P je jeho těžiště.

Nerovnost 11 (David Francis Barrow, 1937)

Nechť P je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Osy úhlů BPC, CPA a APB protínají strany trojúhelníku ABC v po řadě v bodech U, V a W. Pak platí nerovnost

$$|PA| + |PB| + |PC| \geq 2(|PU| + |PV| + |PC|).$$

Rovnost nastane, právě když ABC je rovnostranný trojúhelník a P je jeho těžiště.