Polednice

aneb

Řešení kvadratických rovnic pravítkem a kružítkem

Karel Otruba

Někdy ve svých středoškolských letech jsem našel ve starém almanachu jistého gymnázia „úpravu" Erbenovy básně Polednice. Začíná takto:

U tabule dítě stálo / zplna hrdla mlčelo. / Nad rovnicí – jak se zdálo – / kvadratickou trčelo.
„Nu, tak řešte! Zde je křída, / zde je cirkl, lineál!" / V tichu tone celá třída / a kluk taky neví dál...

A tak podobně dále. Text lze najít na internetu, bohužel s mnohými odchylkami a nepřesnostmi, jak se tak přenášel asi i ústním podáním. Ostatně folklór mívá mnoho variant. I studentský.

Já jsem se ale pozastavil hlavně nad tím, že matikář chtěl po vyvolaném řešit kvadratickou rovnici pomocí kružítka a pravítka. To jsem si tehdy nedovedl představit. Až později, na začátku své učitelské dráhy jsem se seznámil s vynikajícím časopisem KVANT. A když jsem ještě později na internetu našel a procházel i jeho starší čísla, padl mi do oka článek A. A. Presmana, patrně učitele, psaný v ich formě... Pokusil jsem se o překlad, který zde uvádím s kratším komentářem na konci.

Řešení kvadratických rovnic pomocí kružítka a pravítka

А. А. Пресман

„Квант", 1972, № 4

Grafické řešení kvadratické rovnice pomocí paraboly je nepohodlné. Sestrojujeme-li parabolu bod po bodu, je to časově náročné, a přitom přesnost nalezených řešení není velká.

Jednou, když byla řeč o geometrických konstrukcích, dali mi žáci tuto otázku: „Proč neřešíme kvadratické rovnice pomocí kružítka a pravítka? Sestrojení kružnice je přece snadné!"

A tak se objevil v hodině matematiky problém:

Pomocí <u>reálných</u> koeficientů a; b; c kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nalezněte poloměr a souřadnice středu kružnice, protínající osu x v bodech, jejichž x-ové souřadnice jsou kořeny dané rovnice (všude předpokládáme, že $a \neq 0$).

Hned je vidět, že takových kružnic je (nekonečně) mnoho, proto předpokládejme, že hledaná kružnice protíná osu x nejen v bodech $B\,[x_1; 0]$ a $C\,[x_2; 0]$, kde $x_1; x_2$ jsou kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, ale že prochází také bodem $A\,[0; 1]$.
(Oba kořeny nechť jsou zatím reálné <u>různé</u>. Pozn. KO.) Podle vztahu „mocnost bodu ke kružnici" platí

$$OC.OB = OE.OA, \text{ odkud plyne } OE = (OB.OC)/OA = x_1.x_2 = c/a. \qquad (\text{neboť } OA = 1).$$

Středem S této kružnice je průsečík kolmic SF a SK, sestrojených ve středech tětiv AE a BC, proto

$$OK = (x_1 + x_2)/2 = \ldots = -b/2a, \qquad OF = \frac{1+\frac{c}{a}}{2} = \frac{a+c}{2a}$$

Odtud plyne následující způsob nalezení kořenů kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ pomocí kružítka a pravítka:
Sestrojme body $S\,[-b/2a\,;\,(a+c)/2a\,]$ (střed kružnice) a $A\,[0; 1]$.
Pak sestrojme kružnici se středem S a poloměrem SA. První souřadnice průsečíků osy x s touto kružnicí jsou kořeny dané kvadratické rovnice.

Podrobný důkaz správnosti tohoto postupu přenecháváme čtenáři. (Podtrženo KO.)
Uveďme nyní tři případy, které je třeba prozkoumat, a dále grafické nalezení imaginárních (!) kořenů výchozí rovnice.

Případ 1. Poloměr kružnice je větší než druhá souřadnice středu.

Kružnice protíná osu x ve dvou bodech B; C. Rovnice má dva různé reálné kořeny.

Případ 2. Poloměr kružnice se rovná druhé souřadnici středu, kružnice se osy x dotýká v bodě B.

V tomto případě má rovnice jeden kořen dvojnásobný, $x_{1;2} = -b/2a$.

Případ 3. Poloměr kružnice je menší než druhá souřadnice středu, kružnice nemá s osou x společné body. Rovnice nemá reálné kořeny.

Nyní má rovnice dva komplexní kořeny sdružené: $x_{1;2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

Reálná část komplexních kořenů je vyjádřena úsečkou OB = –b/2a, tedy první souřadnicí středu.
Absolutní hodnota imaginárních částí kořenů je vyjádřena úsečkou BC tečny BC ke kružnici.

(Vsuvka KO: Je velmi zajímavé (a důležité!!!) tato tvrzení dokázat výpočtem!!!)

Pomocí uvedeného způsobu lze snadno sledovat i znaménka kořenů rovnice a provést geometrický důkaz Viètových vztahů. Jenomže v tomto případě nemůžeme v odvození Viètových vztahů použít, proto v závěru ukážeme algebraickou interpretaci grafického řešení kvadratické rovnice.

Místo rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ řešme soustavu s ní ekvivalentní

$$ax^2 + bx + c + ay^2 - (a+c).y = 0, \qquad y = 0$$

Je jasné, že má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ kořen x, platí y = 0 a naopak. První rovnice soustavy je rovnicí kružnice (ověřte si to!), druhá je rovnice osy x. V jejich průsečících dostáváme řešení kvadratické rovnice.

(Vsuvka KO: Je opět velmi důležité tohle spočítat. Uvedená kružnice má skutečně hledaný střed S a poloměr SA. Pro gymnazisty je to výborné procvičení úprav algebraických výrazů!!!)

(Konec článku – překladu Presmanova textu)

Komentář:

0) Je nezbytné narýsovat si obrázky a vše si nad nimi projít s tužkou v ruce.
1) Jde především o zajímavé vztahy. Řešit tímto způsobem kvadratické rovnice by bylo neefektivní; přesnost přitom klesá s rostoucí vzájemnou vzdáleností kořenů (pak je příliš „šikmé“ protínání osy x kružnicí, která prochází „neměnným“ bodem A [0; 1]).
2) Je zajímavé prozkoumat nějaké speciálnější případy a přesvědčit se, že uvedený postup vždycky funguje. Zcela krajní případ nastane, když střed oné kružnice splyne s bodem A [0; 1]. To se týká rovnice $x^2 + 1 = 0$, kdy celá kružnice zdegeneruje do bodu A. Interpretujeme-li nyní „tečnu ke kružnici – bodu“ jakožto osu y (jakýsi limitní případ), má úsečka [0; 0]; [0; 1] (OA) délku 1, což je opět velikost imaginární části řešení (± i).
3) V literatuře uvedené a stránkách KDM MFF UK Praha je údajně popsána ještě jiná metoda řešení kvadratické rovnice pomocí kružítka a pravítka.