Metoda diskriminantu

Úloha 1
Určete extrémy funkce $y = x^2 + x + 1$.

Řešení:

protože $D = -3 < 0$ je $f(x) > 0$ pro každé $x \in R$
funkce je tedy omezená zdola a v bodě $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ má minimum
$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

Nyní ukážeme, jak lze předcházející úlohu pojmout jiným způsobem. Na zápis funkce $y = x^2 + x + 1$ budeme pohlížet jako na rovnici, kterou zapíšeme v anulovaném tvaru

$$x^2 + x + 1 - y = 0$$

Dostáváme kvadratickou rovnici s koeficienty $a = 1, b = 1, c = 1 - y$. Pro její diskriminant platí

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4(1 - y) = 4y - 3$$

Ze zadání úlohy plyne, že rovnice $x^2 + x + 1 - y = 0$ má pro $y \in H(f)$ aspoň jedno řešení. Její diskriminant musí být nezáporný.

$$D \geq 0 \Rightarrow 4y - 3 \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{3}{4}$$

Funkce $y = x^2 + x + 1$ je tedy omezená zdola a její nejmenší hodnota je $y = \frac{3}{4}$. Po dosazení do rovnice $x^2 + x + 1 - y = 0$ dostáváme

$$x^2 + x + 1 - \frac{3}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Funkce má minimum v bodě $x = -\frac{1}{2}$.

Úloha 2
Určete extrémy funkce $y = \frac{x}{x^2+1}$.

Řešení:

Předpis pro funkci vyjádříme jako rovnici v anulovaném tvaru

$$yx^2 - x + y = 0$$

Tato kvadratická rovnice má pro $y \in H(f)$ aspoň jedno řešení, její diskriminant musí být nezáporný

$$D = 1 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |y| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Vidíme, že naše funkce je omezená, její minimální hodnota je $y = -\frac{1}{2}$, maximální hodnota je $y = \frac{1}{2}$. Po dosazení do rovnice $yx^2 - x + y = 0$ dostáváme

$$-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Funkce má tedy minimum v bodě $x = -1$ a maximum v bodě $x = 1$.

Úloha 3

Určete extrémy funkce $y = x + \frac{1}{x}$.

Řešení:

Odpovídající kvadratická rovnice má tvar

$$x^2 - yx + 1 = 0$$

Z podmínky $D \geq 0$ plyne $y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \geq 2$. Pro funkční hodnoty tedy platí $y \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$. Snad je zřejmé, že funkce nabývá svého maxima v intervalu $(-\infty, 0)$ a svého minima v intervalu $(0, +\infty)$. Odpovídající hodnoty x získáme řešením rovnice $x^2 - yx + 1 = 0$, do které jsme dosadili $y = -2, y = 2$. Postupně dostáváme

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

Funkce má tedy maximum v bodě $x = -1$ a minimum v bodě $x = 1$.

Úloha 4

Určete extrémy funkce $y = \frac{9}{x-1} - \frac{4}{x-6}$.

Řešení:

Zřejmě platí

$$y = \frac{9}{x-1} - \frac{4}{x-6} = \frac{5x - 50}{x^2 - 7x + 6}$$

Odtud již plyne

$$yx^2 - 7xy + 6y = 5x - 50$$
$$yx^2 - (7y + 5)x + 6y + 50 = 0$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici s parametrem $y \in H(f)$, jejíž diskriminant musí být nezáporný. Zřejmě platí

$$D = (7y + 5)^2 - 4y(6y + 50) = 25y^2 - 130y + 25 = 5(5y^2 - 26y + 5)$$

$$D \geq 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 26y + 5 \geq 0$$

Protože je $5y^2 - 26y + 5 = (5y - 1)(y - 5)$, dostáváme pro y

$$y \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right\rangle \cup \langle 5, +\infty)$$

Funkce má lokální minimu pro $y = 5$ a lokální maximum pro $y = \frac{1}{5}$. Odpovídající hodnoty pro x získáme dosazením za y do rovnice $yx^2 - (7y + 5)x + 6y + 50 = 0$. V případě minima dostáváme rovnici $5x^2 - 40x + 80 = 0$. Odtud již plyne $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2 = 0$. To však znamená, že funkce má minimum v bodě $x = 4$. Podobně v případě maxima dostáváme rovnici $\frac{1}{5}x^2 - \frac{32}{5}x + \frac{256}{5} = 0$. Po úpravě dostáváme $x^2 - 32x + 256 = (x - 16)^2 = 0$. Funkce má maximum v bodě $x = 16$.

Úloha 5

Určete minimum funkce $y = 4x + 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$.

Řešení:

Poznamenejme předem, že zřejmě platí $y > 1$

Funkci vyjádříme ve tvaru

$$\sqrt{4x^2 - 1} = 4x + 1 - y$$

Dříve než provedeme umocnění, položíme $1 - y = b$

$$\sqrt{4x^2 - 1} = 4x + b$$

Po umocnění a úpravě dostáváme kvadratickou rovnici

$$12x^2 + 8xb + b^2 + 1 = 0$$

Pro diskriminant platí $D = 16b^2 - 48$, odkud pro $D \geq 0$ plyne $16b^2 - 48 \geq 0$, tedy $|b| \geq \sqrt{3}$, a proto je

$$b \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle\sqrt{3}, +\infty\right)$$

Vzhledem k $1 - y = b$ je $|1 - y| = |b| \geq \sqrt{3}$. Protože je $y > 1$, platí $|1 - y| = y - 1$ a dostáváme $y \geq 1 + \sqrt{3}$. Hodnota minima funkce je $y = 1 + \sqrt{3}$. Této hodnoty nabývá funkce v bodě $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, což plyne z rovnice $12x^2 + 8xb + b^2 + 1 = 0$, do které jsme dosadili $b = -\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} 12x^2 - 8\sqrt{3}x + 4 &= 0 \\ 3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 &= 0 \\ (\sqrt{3}x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Úloha 6

Kladné číslo a rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Řešení:

Označíme-li jednotlivé sčítance $x, a - x$, pak hledáme maximum výrazu $S = x(a - x)$. Odpovídající kvadratická rovnice má tvar

$$x^2 - ax + S = 0$$

Z podmínky $D \geq 0$ plyne $a^2 - 4S \geq 0$ a tedy $S \leq \frac{a^2}{4}$. Dosadíme-li nyní do kvadratické rovnice za $S = \frac{a^2}{4}$ dostaneme rovnici

$$4x^2 - 4ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - a)^2 = 0$$

Odtud již plyne, že hledané maximum nastane pro $x = \frac{a}{2}$.

Úloha 7

Do půlkruhu s poloměrem r vepište obdélník maximálního obsahu.

Řešení:

Označíme-li rozměry obdélníku x, y, pak pro hledaný obsah platí $S = xy$, kde $y = \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$. Po dosazení dostáváme $S = x\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$.

Odpovídající bikvadratická rovnice má tvar

$$x^4 - 4r^2x^2 + 4S^2 = 0$$

Z podmínky $D \geq 0$ plyne $16r^4 - 16S^2 \geq 0 \Leftrightarrow S^2 \leq r^4$. Dosadíme-li do předcházející rovnice za $S^2 = r^4$ dostaneme

$$x^4 - 4r^2x^2 + 4r^4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2r^2)^2 = 0$$

Odtud již dostáváme rozměry hledaného obdélníku $x = r\sqrt{2}, y = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Úloha 8

Do trojúhelníku se základnou z a výškou v vepište obdélník maximálního obsahu.

Řešení:

Označíme-li rozměry obdélníku x, y tak, jak je uvedeno na obrázku, pak na základě podobnosti trojúhelníků může psáti

$$\frac{v - y}{x} = \frac{v}{z} \Leftrightarrow y = \frac{v}{z}(z - x)$$

Pro obsah trojúhelníku platí

$$S = xy = x\frac{v}{z}(z - x) = vx - \frac{v}{z}x^2$$

Odpovídající kvadratická rovnice má tvar

$$vx^2 - vzx + zS = 0$$

Z podmínky $D \geq 0$ plyne $v^2z^2 - 4vzS \geq 0 \Leftrightarrow S \leq \frac{vz}{4}$. Dosadíme-li do předcházející rovnice za $S = \frac{vz}{4}$ dostaneme

$$4x^2 - 4zx + z^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - z)^2 = 0.$$

Odtud dostáváme jeden rozměr obdélníku $x = \frac{z}{2}$. Pro druhý rozměr platí

$$y = \frac{v}{z}(z - x) = \frac{v}{z}(z - \frac{z}{2}) = \frac{v}{2}.$$

Metoda diskriminantu je také vhodná při dokazování některých algebraických nerovností. Ukážeme nyní na několika úlohách, jak v takových případech postupovat.

Úloha 9
Dokažte, že kladná reálná čísla a, b, c jsou délkami stran trojúhelníku, právě když platí nerovnost

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Řešení:

úpravami uvedené nerovnosti získáme ekvivalentní nerovnost

$$a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 < 0$$

položíme-li nyní $a^2 = x$, dostaneme kvadratickou nerovnost

$$x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b^2 - c^2)^2 < 0$$

odpovídající kvadratická rovnice $x^2 - 2(b^2 + c^2)x + (b^2 - c^2)^2 = 0$ má kořeny $x_1 = (b - c)^2$ a $x_2 = (b + c)^2$. Podle věty uvedené v úvodu tohoto článku platí $(b-c)^2 < x < (b+c)^2$, tj. $(b-c)^2 < a^2 < (b+c)^2$. Odmocněním dostáváme $|b - c| < a < b + c$.

Úloha 10
Nechť $x_1, x_2, \cdots, x_n$ jsou daná reálná čísla. Zjistěte, pro které $x \in R$ má součet

$$S = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$$

nejmenší hodnotu.

Řešení:

Uvažte, že výše uvedený součet S lze zapsat ve tvaru

$$S = nx^2 + bx + c,$$

kde $b = -2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), c = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Podle věty z úvodu článku nabývá S nejmenší hodnotu pro

$$x = -\frac{b}{2n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Pokud bychom postupovali stejným způsobem jako u vyšetřování extrémů funkcí, dostali bychom kvadratickou rovnici

$$nx^2 + bx + c - S = 0.$$

Z podmínky $D \geq 0$ plyne $b^2 - 4n(c - S) \geq 0 \Leftrightarrow S \geq \frac{4nc-b^2}{4n}$. Po dosazení za $S = \frac{4nc-b^2}{4n}$ do kvadratické rovnice dostaneme rovnici

$$4n^2x^2 + 4nbx + b^2 = 0 \Leftrightarrow (2nx + b)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2n}.$$