Cvičení 8.: Mnohonásobná a parciální korelace

Příklad 1.: Výnosy pšenice (příklad je převzat ze skript Michálek Jaroslav, Osecký Pavel, Pešek Josef, Rod Jan, Vondráček Jiří: Biometrika, SNTL Praha 1982)
Během 30 let od roku 1913 do roku 1942 byly na 20 vybraných farmách ve Švédsku v oblasti Kalmar sledovány následující čtyři náhodné veličiny:
Y … průměrný výnos pšenice z podzimní setby (v kg/ha)
X_1 … průměrná teplota vzduchu během předchozí zimy (říjen – březen) v oblasti Kalmar (ve °C)
X_2 … průměrná teplota vzduchu během vegetačního období (duben – září) v oblasti Kalmar (ve °C)
X_3 … celkové srážky během vegetačního období, počítané jako průměr ze tří různých meteorologických stanic (v mm)
Data jsou uložena v souboru psenice.sta.

	1 Y	2 X1	3 X2	4 X3
1	1990	2,7	12,8	230
2	1950	3,1	13,7	268
3	1630	1,9	12	188
4	1720	1,3	11,7	315
5	1560	1	12,7	180
6	1680	1,6	12	261
7	1980	2,3	12,2	216
8	2180	1,7	12,8	346
9	2370	3,1	13,1	131
10	1790	1,1	11,8	256
11	2400	1,6	11,2	327
12	1410	0,1	11,8	320
13	2570	3,7	13,2	382
14	2180	1,1	12,5	279
15	2150	2,5	12,2	351
16	2530	0,8	10,5	324
17	2100	0,8	10,9	196
18	2330	3,6	12,4	381
19	1850	1,6	10,7	237
20	2230	1,9	12,5	289
21	2310	2,2	11,9	338
22	2600	3	13,5	267
23	2480	3,2	12,3	372
24	1940	2,8	12,3	367
25	2770	2,1	13,5	358
26	2570	3,3	12,9	202
27	2510	3,8	13,4	311
28	1420	-1,1	11,3	172
29	810	-0,4	11,3	194
30	1990	-2,4	11,2	261

Úkol 1.: Měli bychom předpokládat, že náhodný vektor $(Y, X_1, X_2, X_3)'$ se řídí čtyřrozměrným normálním rozložením, tedy naše data jsou realizacemi náhodného výběru rozsahu 30 z tohoto normálního rozložení. Přesvědčíme se alespoň o jednorozměrné normalitě sledovaných proměnných.

Normalitu proměnných Y, X_1, X_2, X_3 posuďte Andersonovým - Darlingovým testem s hladinou významnosti 0,05.

Řešení:

A-D test je dostupný v modulu Rozdělení & simulace, Proložení dat rozděleními. Dostaneme tyto výsledky:

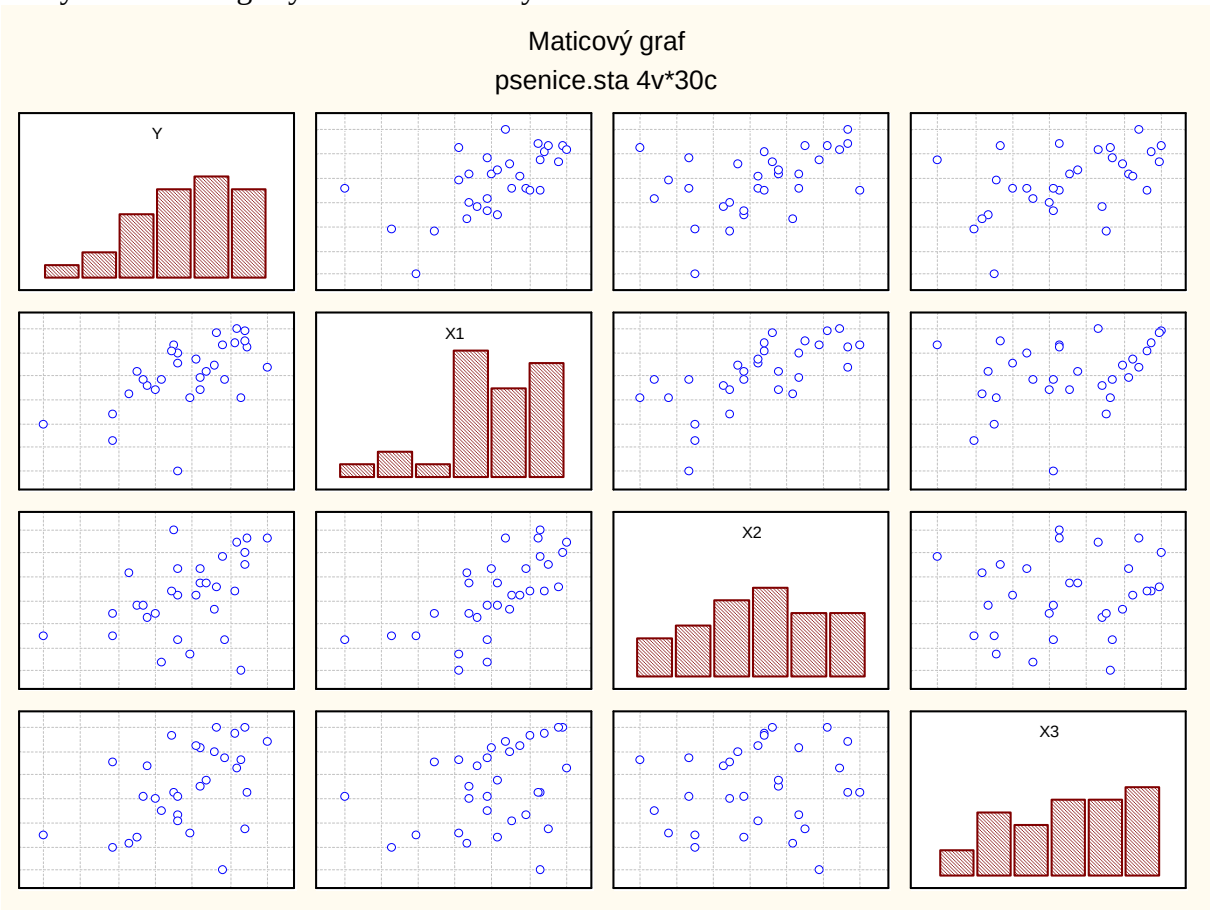
	AD stat.	AD p-hodn.
Y	0,322445	0,920115
X1	0,493906	0,751739
X2	0,185603	0,993464
X3	0,405985	0,841766

Na hladině významnosti 0,05 nelze ani v jednom případě zamítnout hypotézu o normalitě.

Úkol 2.: Pomocí dvourozměrných tečkových diagramů znázorněte závislost mezi všemi dvojicemi náhodných veličin..

Řešení:

Grafy – Maticové grafy – Proměnné – Vybrat vše – OK



Úkol 3.: Vypočtěte výběrové korelační koeficienty pro všechny dvojice náhodných veličin a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézy o nezávislosti. Najděte 95% intervaly spolehlivosti pro všech šest korelačních koeficientů.

Řešení:

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Korelační matice – OK – 1 seznam proměnných – Proměnné 1-4 – OK – na záložce Možnosti zaškrtneme Zobrazit r, úrovně p, počty N a zaškrtneme Zobrazit dlouhá jména proměnných – Výpočet

Proměnná	Korelace (psenice) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 N=30 (Celé případy vynechány u ChD) Y	X1	X2	X3
Y: výnos	1,0000	,5962	,4188	,4542
	p= ---	p=,001	p=,021	p=,012
X1: zimni teploty	,5962	1,0000	,6703	,3205
	p=,001	p= ---	p=,000	p=,084
X2: letni teploty	,4188	,6703	1,0000	,1370
	p=,021	p=,000	p= ---	p=,471
X3: srazky	,4542	,3205	,1370	1,0000
	p=,012	p=,084	p=,471	p= ---

Vidíme, že korelační koeficient mezi:
a) výnosem a zimní teplotou je 0,5962, p-hodnota je 0,001, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin Y a X_1;
b) výnosem a letní teplotou je 0,4188, p-hodnota je 0,021, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin Y a X_2;
c) výnosem a srážkami je 0,4542, p-hodnota je 0,012, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin Y a X_3;
d) zimní teplotou a letní teplotou je 0,6703, p-hodnota je 0,000, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin X_1 a X_2;
e) zimní teplotou a srážkami je 0,3205, p-hodnota je 0,084, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nezávislosti veličin X_1 a X_3;
f) letní teplotou a srážkami je 0,137, p-hodnota je 0,471, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nezávislosti veličin X_2 a X_3.

Meze intervalů spolehlivosti pro koeficienty korelace získáme pomocí modulu Analýza síly testu.
Např. koeficient korelace mezi výnosem a zimní teplotou se s pravděpodobností přibližně 0,95 nachází v intervalu (0,3; 0,79).

Úkol 4.: Vypočtěte všechny výběrové parciální korelační koeficienty mezi Y a ostatními proměnnými a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézy o jejich nevýznamnosti.
Řešení:
Postup ukážeme na výpočtu $r_{Y,X_1.X_2}$, tj. při zkoumání závislosti výnosu na zimních teplotách při vyloučení vlivu letních teplot a na výpočtu $r_{Y,X_2.X_1}$, tj. při zkoumání závislosti výnosu na letních teplotách při vyloučení vlivu zimních teplot.

Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Korelační matice – OK – na záložce Možnosti zaškrtneme Zobrazit r, úrovně p, počty N a zaškrtneme Zobrazit dlouhá jména proměnných, na záložce Detaily zvolíme Parciální korelace – 1. seznam proměnných Y, X1, druhý seznam proměnných X2 – OK

Proměnná	Parciální korelace (psenice.sta) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 N=30 (Celé případy vynechány u ChD) Y	X1
Y: výnos	1,0000	,4682
	p= ---	p=,010
X1: zimni teploty	,4682	1,0000
	p=,010	p= ---

Vidíme, že výběrový parciální korelační koeficient $r_{Y,X_1.X_{21}}$ je 0,4682, p-hodnota je 0,01, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nevýznamnosti $\rho_{Y,X_1.X_2}$.

Analogicky 1. seznam proměnných Y, X2, druhý seznam proměnných X1 – OK

Proměnná	Parciální korelace (psenice.sta) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 N=30 (Celé případy vynechány u ChD) Y	X2
Y: výnos	1,0000	,0322
	p= ---	p=,868
X2: letni teploty	,0322	1,0000
	p=,868	p= ---

V tomto případě výběrový parciální korelační koeficient $r_{Y,X_2.X_1}$ je 0,0322, p-hodnota je 0,868, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nevýznamnosti $\rho_{Y,X_2.X_1}$.

Interpretace: Výběrový korelační koeficient $r_{Y,X_1} = 0{,}5962$, což je podstatně více než $r_{Y,X_2} = 0{,}4188$. Mohlo by to znamenat, že vliv zimních teplot na výnosy pšenice je vyšší než vliv letních teplot. Pokud zkoumáme závislost Y na X_1 při vyloučení vlivu X_2, dostaneme výběrový parciální korelační koeficient 0,4682, což je poněkud nižší než 0,5962. Ovšem když zkoumáme závislost Y na X_2 při vyloučení vlivu X_1, dostaneme výběrový parciální korelační koeficient 0,0322, což je zcela nevýznamná korelace.

Stejným způsobem vypočteme a prozkoumáme další parciální korelační koeficienty. Pro kontrolu: $r_{Y,X_1.X_3} = 0{,}534$, p = 0,033, $r_{Y,X_2.X_3} = 0{,}4041$, p = 0,03, $r_{Y,X_3.X_1} = 0{,}346$, p = 0,066, $r_{Y,X_3.X_2} = 0{,}4412$, p = 0,017, $r_{Y,X_1.(X_2,X_3)} = 0{,}388$, p = 0,041, $r_{Y,X_2.(X_1,X_3)} = 0{,}0756$, p = 0,702, $r_{Y,X_3.(X_1,X_2)} = 0{,}3519$, p = 0,066.

Z těchto výsledků vyplývá, že na výnosy mají silný vliv zimní teploty a srážky, zatímco vliv letních teplot je způsoben silnou korelací mezi zimními a letními teplotami.

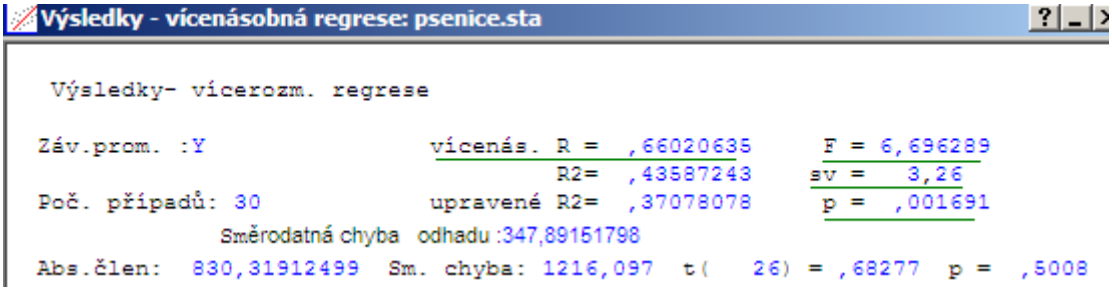
Úkol 5.: Vypočtěte výběrový koeficient mnohonásobné korelace mezi výnosy a ostatními proměnnými a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu o jeho nevýznamnosti.

Řešení:

Statistiky – Vícenásobná regrese – Proměnné – Závislá proměnná Y, seznam nezáv. proměnných X1, X2, X3 – OK – OK.

Koeficient $r_{Y,(X_1,X_2,X_3)}$ najdeme v záhlaví výstupní tabulky pod označením Vícenás. R = 0,6602.

Hodnota testové statistiky pro test nevýznamnosti koeficientu mnohonásobné korelace $\rho_{Y,(X_1,X_2,X_3)}$ je 6,6963, počet stupňů volnosti čitatele je 3, jmenovatele 26, odpovídající p-hodnota je 0,001691, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že výnosy pšenice nejsou závislé na zimních teplotách, letních teplotách a srážkách.



Upozornění: Povšimněte si, že všechny výběrové párové korelační koeficienty veličiny Y s ostatními proměnnými jsou v absolutní hodnotě menší než výběrový koeficient mnohonásobné korelace: $r_{Y,X_1} = 0{,}5962$, $r_{Y,X_2} = 0{,}4188$, $r_{Y,X_3} = 0{,}4542$, zatímco $r_{Y,(X_1,X_3,X_3)} = 0{,}6602$.

Příklad 2.: U 19 vzorků potravinářské pšenice byl zjišťován obsah zinku v zrnu (proměnná Y), v kořenech (proměnná X_1), v otrubách (X_2) a ve stonku a listech (X_3). Data jsou uložena v souboru zinek.sta.

	1 Y	2 X1	3 X2	4 X3
1	175	164	198	162
2	169	160	198	159
3	175	158	211	164
4	181	162	211	162
5	539	520	567	523
6	526	502	540	491
7	344	339	355	334
8	475	460	500	446
9	820	683	813	695
10	841	731	832	714
11	828	710	846	697
12	775	716	818	709
13	622	543	635	563
14	661	577	712	580
15	579	505	596	531
16	936	790	946	814
17	903	806	946	834
18	927	793	912	824
19	889	820	919	807

a) Normalitu proměnných Y, X_1, X_2, X_3 posuďte Lilieforsovým testem s hladinou významnosti 0,05.

b) Závislost mezi dvojicemi proměnných (Y,X_1), (Y,X_2), (Y,X_3) znázorněte dvourozměrnými tečkovými diagramy.

c) Vypočtěte výběrovou korelační matici všech čtyř proměnných a pro $\alpha = 0{,}05$ otestujte významnost jednotlivých korelačních koeficientů.

d) Vypočtěte výběrové parciální korelační koeficienty $r_{Y,X_1.(X_2,X_3)}$, $r_{Y,X_2.(X_1,X_3)}$, $r_{Y,X_3.(X_1,X_2)}$ a porovnejte je s výběrovými párovými korelačními koeficienty r_{YX_1}, r_{YX_2}, r_{YX_3}. Na hladině významnosti a = 0,05 testujte hypotézy o nevýznamnosti parciálních korelačních koeficientu $\rho_{Y,X_1.(X_2,X_3)}$, $\rho_{Y,X_2.(X_1,X_3)}$, $\rho_{Y,X_3.(X_1,X_2)}$.

Řešení: Načteme datový soubor zinek.sta.

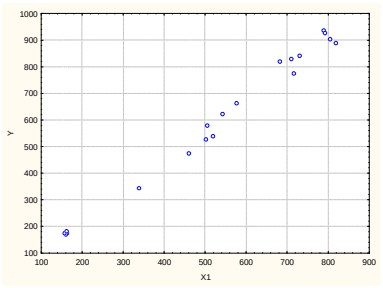
ad a) Výsledky Lileforsova testu normality

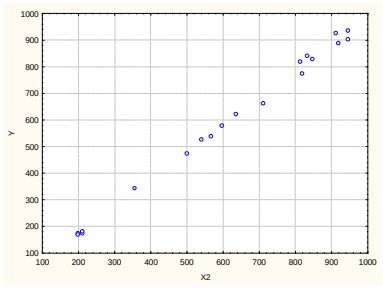
proměnná	testová statistika	p-hodnota
Y	0,15792	> 0,2
X_1	0,15613	> 0,2
X_2	0,18177	< 0,1
X_3	0,16420	< 0,2

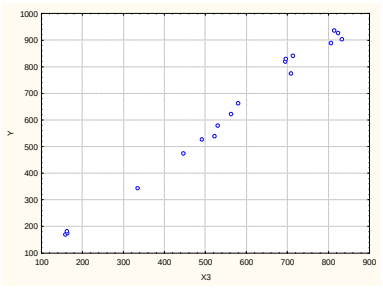
Na hladině významnosti 0,05 nelze ani v jednom případě zamítnout hypotézu o normalitě.

ad b)

Dvourozměrné tečkové diagramy dvojic (Y,X_1), (Y,X_2), (Y,X_3) svědčí o existenci dosti silné přímé lineární závislosti.







ad c) Výběrová korelační matice proměnných Y, X_1, X_2, X_3 spolu s odpovídajícími p-hodnotami:

Proměnná	Y	X1	X2	X3
Y	1,0000	,9947	,9981	,9959
	p= ---	p=,000	p=0,00	p=0,00
X1	,9947	1,0000	,9954	,9980
	p=,000	p= ---	p=,000	p=0,00
X2	,9981	,9954	1,0000	,9962
	p=0,00	p=,000	p= ---	p=0,00
X3	,9959	,9980	,9962	1,0000
	p=0,00	p=0,00	p=0,00	p= ---

Na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nevýznamnosti jednotlivých korelačních koeficientů.

ad d)

Výběrový koeficient parciální korelace $r_{Y,X_1.(X_2,X_3)}$

Proměnná	Y	X1
Y	1,0000	-,0390
	p= ---	p=,882
X1	-,0390	1,0000
	p=,882	p= ---

Výběrový koeficient korelace r_{YX_1} je 0,9947, zatímco $r_{Y,X_1.(X_2,X_3)}$ je -0,039.

Pokud eliminujeme vliv proměnných X_2, X_3, tak mezi proměnnými Y a X_1 existuje velmi slabá nepřímá lineární závislost, která není na hladině 0,05 významná.

Výběrový koeficient parciální korelace $r_{Y,X_2.(X_1,X_3)}$

Proměnná	Y	X2
Y	1,0000	,7515
	p= ---	p=,001
X2	,7515	1,0000
	p=,001	p= ---

Výběrový koeficient korelace r_{YX_2} je 0,9981, zatímco $r_{Y,X_2.(X_1,X_3)}$ poklesl na 0,7515.

Pokud eliminujeme vliv proměnných X_1, X_3, tak mezi proměnnými Y a X_2 existuje silná přímá lineární závislost, která je na hladině 0,05 významná.

Výběrový koeficient parciální korelace $r_{Y,X_3.(X_1,X_2)}$

Proměnná	Y	X3
Y	1,0000	,2230
	p= ---	p=,390
X3	,2230	1,0000
	p=,390	p= ---

Výběrový koeficient korelace r_{YX_3} je 0,99589, zatímco $r_{Y,X_3.(X_1,X_2)}$ je pouze 0,223.

Pokud eliminujeme vliv proměnných X_1, X_2, tak mezi proměnnými Y a X_3 existuje slabá přímá lineární závislost, která není na hladině 0,05 významná.

Vidíme, že existují značné rozdíly mezi párovými a parciálními výběrovými korelačními koeficienty.