Spektrální analýza

L^2 teorie, obecná Fourierova řada a podmínky pro její konvergenci, úplné ortonormální systémy a příklady takových systémů, Parsevalova rovnost, Fourierova transformace a její základní vlastnosti, věta o inverzní transformaci

Jana Faltýnková

Přírodovědecká fakulta
Seminář z finanční matematiky

Masarykova univerzita 2016

Prostor $L^2(a,b)$ (Hilbertův prostor)

- $L^2(a,b) = \left\{ f : (a,b) \to \mathbb{C}, \int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$
- $(f,g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g}(x)\,\mathrm{d}x$
- $||f||^2 = (f,f)$
- $\rho(f,g) = ||f-g|| = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$
- Cauchy-Schwarzova nerovnost: $|(f,g)| \leqslant ||f|| \cdot ||g||$
- Skalární součin je spojitý *(důkaz)*

Ortogonální systém

Definice: Řekneme, že $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ je *ortogonální systém funkcí*, jestliže $\forall n \neq m : (\phi_n, \phi_m) = 0$. Pokud navíc $||\phi_n|| = 1$, systém se nazývá *ortonormální*.

Fourierova řada

Definice: Nechť $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální systém v $L^2(a,b)$, $f \in L^2(a,b)$. Položme $c_n = \int_a^b f(x)\,\overline{\phi_n}(x)\,\mathrm{d}x = (f,\phi_n)$. Čísla c_n se nazývají *Fourierovy koeficienty* funkce f vzhledem k systému (ϕ_n). Formální řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\phi_n$ se nazývá *Fourierova řada funkce* f.

- **Příklady ortogonálních systémů:**
  - $(1, \sin nx, \cos nx)_{n=1}^{\infty}$
  - $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)_{n=-\infty}^{\infty}$
  - $(\sin nx)_{n=1}^{\infty}$
- Částečný součet Fourierovy řady: $f_N = \sum_{n=0}^{N} c_n\,\phi_n \in \mathcal{L}(\phi_0, \ldots, \phi_N)$

Fourierova řada

- **Věta:** *Nechť* $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ *je ortonormální systém,* $f \in L^2(a,b)$, c_n *jsou Fourierovy koeficienty funkce* f*. Pak pro libovolné* $d_0, \dots, d_N$ *platí*

$$||f - \sum_{n=0}^{N} d_n\phi_n|| \geqslant ||f - f_N||\,,$$

tj. f_N *je nejlepší aproximací funkce* f *v* $\mathcal{L}(\phi_0, \dots, \phi_N)$*. Rovnost nastane pouze, je-li* $d_0 = c_0, \dots, d_N = c_N$ *(*f_N *je jediná nejlepší aproximace funkce* f *v* $\mathcal{L}(\phi_0, \dots, \phi_N)$*).*

Besselova rovnost, Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost

- **Důsledky:**
  - *Besselova rovnost (Besselova identita)*: $||f||^2 = \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 + ||f - f_N||^2$
  - *Besselova nerovnost:* $\forall N : \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 \leqslant ||f||^2$, tedy $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant ||f||^2$
- **Věta:** *Fourierova řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n$ *konverguje v normě k funkci* f *právě tehdy, když platí Parsevalova rovnost* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = ||f||^2$

Rieszova - Fischerova věta

- **Věta (Rieszova - Fischerova věta):** *Nechť $(c_n)_{n=0}^{\infty} \in l^2$. Pak existuje funkce f, jejíž Fourierovy koeficienty jsou $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n$ konverguje k funkci f*

- **Poznámka:** Konvergence v normě:
$$\int_a^b |f_n - f|^2 \,\mathrm{d}x < (b-a)\,\varepsilon$$

Úplný ortonormální systém

Definice: Ortonormální systém $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *úplný*, jestliže platí:
Pokud pro nějakou funkci $f \in L^2(a, b)$ je $(f, \phi_n) = 0 \, \forall n$, pak $f \equiv 0$.

- **Věta:** *Nechť* $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ *je úplný ortonormální systém,* $f \in L^2(a, b)$, $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ *jsou Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k* $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$. *Pak* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n$ *konverguje k f a platí tedy* $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = ||f||^2$

Uzavřený systém

Definice: Systém $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *uzavřený* v $L^2(a,b)$, jestliže $\mathcal{L}\left((\phi_n)_{n=0}^{\infty}\right)$ je hustý v $L^2(a,b)$, tj. $\overline{\mathcal{L}\left((\phi_n)_{n=0}^{\infty}\right)} = L^2(a,b)$.

- **Věta:** *Ortonormální systém* $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ *je úplný právě tehdy, když je uzavřený.*

Fourierova transformace

Definice: Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pro $t \in \mathbb{R}$ definujeme $\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x$. Funkci $\widehat{f}$ nazýváme *Fourierova transformace funkce* f.

- $\forall t \in \mathbb{R}$ je $\widehat{f}(t)$ konečný, protože

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \text{ a}$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

- **Věta:** *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$ je ohraničená, pak $\widehat{f}$ je spojitá.*

Základní vlastnosti Fourierovy transformace:

- ***Linearita:*** $\widehat{af_1 + bf_2} = a\widehat{f_1} + b\widehat{f_2}$
- ***Změna měřítka:*** $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f_R(x) = f(R \cdot x)$, pak $\widehat{f_R}(t) = \frac{1}{|R|} f\left(\frac{t}{R}\right)$
- ***F.T. derivace:*** $f, f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, pak $\widehat{f'}(t) = \mathrm{i}t \cdot \widehat{f}(t)$
- $\to$ *důsledek:* $\widehat{f^{(k)}}(t) = (\mathrm{i}t)^k \widehat{f}(t)$
- ***Derivace F.T.:*** $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $g(x) = x \cdot f(x)$, $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, pak $\widehat{f}$ je diferencovatelná a platí $\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i} \cdot \widehat{g}(t)$
- ***F.T. konvoluce:*** $f, g \in L^1$, pak $\widehat{f * g}(t) = \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t)$

Základní vlastnosti Fourierovy transformace:

- ***F.T. posunutí:*** $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $f_a(x) = f(x-a)$, pak $\widehat{f_a}(t) = \widehat{f}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}at}$
- ***Posunutí F.T.:*** $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, pak $\widehat{f}(t-a) = \widehat{f(x)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ax}}\,(t)$
- ***F.T. Gaussovy funkce:*** $G(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, pak $\widehat{G}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$
- ***Základní identita F.T.:*** $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}\cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \widehat{g}$$

Fourierova transformace v $\mathbb{R}^n$

- Předpokládejme: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \in L^1(\mathbb{R}^n), \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)\,, \mathbf{t} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} t_j \cdot x_j$

Definice: Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. *Fourierovu transformaci v $\mathbb{R}^n$* definujeme jako $\widehat{f}(\mathbf{t}) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{t}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$.

- **Poznámka:** Funkce *Schwarzovy třídy* (rychle klesající v ∞)
  - $\mathcal{S} = \left\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \lim_{||x|| \to \infty} |x^\alpha f^{(\beta)}| = 0 \forall \alpha, \beta\right\}$
  - $C_0^\infty = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}),$ f má kompaktní nosič$\}$

Základní vlastnosti Fourierovy transformace v $\mathbb{R}^n$:

- ***Linearita:*** $\widehat{af_1 + bf_2} = a\widehat{f_1} + b\widehat{f_2}$
- ***Změna měřítka:*** $f_R(\mathbf{x}) = f(R \cdot \mathbf{x}), R > 0$, pak $\widehat{f_R}(\mathbf{t}) = \frac{1}{R^n} f\left(\frac{\mathbf{t}}{R}\right)$
- ***F.T. parciální derivace:*** $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\mathbf{t}) = \mathrm{i}t_j \cdot \widehat{f}(\mathbf{t})$
- $\rightarrow$ *důsledek:* $\widehat{\Delta f}\,(\mathbf{t}) = -||\mathbf{t}||^2\,\widehat{f}\,(\mathbf{t})$
- ***Základní identita F.T. v $\mathbb{R}^n$:*** $f, g \in L^1 \cap C$, pak

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} \cdot g = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \widehat{g}$$

Inverzní Fourierova transformace

- **Věta o inverzní F.T.:** *$f, \widehat{f} \in L^1 \cap C$, f je stejnoměrně spojitá. Pak*
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tx}\, \mathrm{d}t\,.$$

- **Inverzní F.T. v $\mathbb{R}$:** $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, tx}\, \mathrm{d}t$
- **Inverzní F.T. v $\mathbb{R}^n$:** $f \in \mathcal{S}$, pak $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\mathbf{t})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, \mathbf{t}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}\mathbf{t}$

Aplikace Fourierovy transformace

- Důkaz Centrální limitní věty
- Řešení rovnice vedení tepla