INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lineární algebra a geometrie

Mgr. Veronika Švandová a Mgr. Zdeněk Kříž, Ph. D.

Obsah

1 Lineární algebra: Matice - rozšíření **2**

1.1 Teorie . . . 2

1.1.1 Transponovaná matice . . . 2

1.1.2 Inverzní matice . . . 2

1.2 Řešené příklady . . . 3

1.3 Příklady k procvičení . . . 8

2 Geometrie: Vlastní čísla a vlastní vektory **8**

2.1 Teorie . . . 8

2.2 Řešené příklady . . . 9

2.3 Příklady k procvičení . . . 14

1 Lineární algebra: Matice - rozšíření

Tato kapitola navazuje na Úvod do matematiky - Lineární algebra - kapitola Matice. Než budete pokračovat, doporučujeme její zopakování.

1.1 Teorie

1.1.1 Transponovaná matice

Připomeňme si, že symbolem $A = (a_{ij})$ jsme označovali *maticí typu* m/n tj.:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pro práci s maticemi je někdy výhodné zaměnit řádky matice za její sloupce.[1]

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n. Potom matice A^T [a] typu n/m, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce, tj.:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

se nazývá *transponovaná matice* k matici A.

[a] Transponovaná matice se také někdy označuje jako $\overline{A}$ či A'.

1.1.2 Inverzní matice

Připomeňme si, že čtvercová matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky a jinde má všechny prvky nulové, se nazývá *jednotková matice* a značí se E. Jednotková matice je "jedničkou"vzhledem k násobení čtvercových matic - pokud s ní vynásobíme jinou matici, výsledkem je příslušná matice: $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Nechť A je čtvercová matice řádu n, E je jednotková matice také řádu n. Matice A^{-1} s vlastností

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{2}$$

se nazývá *inverzní matice k matici* A.

[1] Např. při určování hodnosti matice můžeme pracovat jak s řádky, tak se sloupci matice. Hodnost matice se tím nezmění.

Inverzní matice k dané matici nemusí vždy existovat. Dá se dokázat, že k dané matici A existuje právě jedna matice inverzní, pokud pro determinant původní matice platí $|A| \neq 0$[2] . Jak ale inverzní matici najít?

Výpočet inverzní matice - pomocí ekvivalentních úprav

1) Zapíšeme **zadanou** matici A, ke které hledáme matici inverzní ("**levá matice**"), a vpravo vedle ní zapíšeme matici **jednotkovou** ("**pravá matice**"). S oběma maticemi dále pracujeme, jakoby to byla jediná matice ("**celková matice**").
2) Ekvivalentními úpravami (EÚ) převedeme "levou matici"A na **schodovitý tvar**. Přitom nezapomeneme pracovat i s prvky pravé matice.
3) Následně pomocí EÚ vytvoříme **nuly i nad hlavní diagonálou** levé matice. Opět nezapomeneme pracovat i s prvky pravé matice.
4) Na závěr pomocí EÚ vytvoříme z levé matice matici jednotkovou (pokud nedostaneme jednotkovou matici rovnou v kroku 3, tak jednotlivé řádky celkové vydělíme nenulovými čísly tak, aby levá matice měla v hlavní diagonále samé jedničky).
5) Po provedení kroků (1)-(4) se **inverzní matice** k zadané matici nachází na místě **pravé** matice.

Celý postup můžeme souhrnně označit jako: $(A|E) \sim \cdots \sim (E|A^{-1})$.

Výpočet inverzní matice - pomocí algebraických doplňků

Nechť A je čtvercová matice řádu n taková, že $|A| \neq 0$. Pak

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}^T , \tag{3}$$

kde A_{ij} je tzv. *algebraický doplněk* k prvku a_{ij} v původní matici A, který se vypočte jako $(-1)^{i+j}|\overline{A_{ij}}|$, přičemž $|\overline{A_{ij}}|$ je determinant submatice získané z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

1.2 Řešené příklady

Příklad 1. *Určete inverzní matici k matici* $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

Řešení. Budeme postupovat přesně dle postupu uvedeného pro výpočet inverzní matice - pomocí ekvivalentních úprav.

Zapíšeme **zadanou** matici A, ke které hledáme matici inverzní ("**levá matice**"), a vpravo vedle ní zapíšeme matici **jednotkovou** ("**pravá matice**"). S oběma maticemi dále pracujeme, jakoby to byla jediná matice ("**celková matice**"):

[2] Matice A s vlastností $|A| \neq 0$ se nazývá *regulární matice*.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Pomocí EÚ převedeme "levou matici"A na **schodovitý tvar**. Z hlediska těchto úprav bude vhodné umístit 2. řádek na místo 1. řádku (v levém rohu matice mít číslo -1). 1. řádek pak vynásobíme šesti a přičteme k 2. řádku, dále vynásobíme 1. řádek číslem 2 a přičteme k 3. řádku. Přitom nezapomeneme pracovat i s prvky "pravé matice":

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Z hlediska dalších úprav bude výhodné prohodit 2. a 3. řádek:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right).$$

Následně vynásobíme 2. řádek číslem -2 a přičteme k 3. řádku. Tím dostaneme matici ve schodovitém tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Nyní je třeba vytvořit **nuly i nad hlavní diagonálou** "levé matice". 2. řádek matice je z hlediska této úpravy ve vhodném tvaru. V 1. řádku matice získáme nejdříve 0 na pozici $a_{13} = 3$ a to tak, že vynásobíme 3. řádek číslem -3 a přičteme ho k 1. řádku:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Dále potřebujeme získat v 1. řádku matice 0 na pozici $a_{12} = 1$ a to tak, že vynásobíme 2. řádek číslem -1 a přičteme ho k 1. řádku:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & -3 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Nyní z "levé matice"vytvoříme jednotkovou matici - stačí vynásobit první řádek číslem -1:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & -3 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

A jsme hotovi - **inverzní matice** k zadané matici se nachází na místě "**pravé** matice", tj.

$$A^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 2. *Určete inverzní matici k matici* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *pomocí ekvivalentních úprav.*

Řešení. Opět budeme postupovat podle postupu uvedeného pro výpočet inverzní matice - pomocí ekvivalentních úprav.

Zapíšeme **zadanou** matici A, ke které hledáme matici inverzní ("**levá matice**"), a vpravo vedle ní zapíšeme matici **jednotkovou** ("**pravá matice**"). S oběma maticemi dále pracujeme, jakoby to byla jediná matice ("**celková matice**"):

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Pomocí EÚ převedeme "levou matici"A na **schodovitý tvar**. 1. řádek matice vynásobíme číslem (-1) a přičteme k 2. a 3. řádku. Nezapomeneme přitom pracovat i s prvky "pravé matice":

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Následně vynásobíme 2. řádek číslem 2 a přičteme k 3. řádku. Tím dostaneme matici ve schodovitém tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní je třeba vytvořit **nuly i nad hlavní diagonálou** "levé matice". Abychom vytvořili 0 na místě $a_{23} = -3$, vynásobíme 3. řádek číslem -3 a přičteme ho k 4-násobku 2. řádku. Dále také přičteme 3. řádek k 1. řádku:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní z "levé matice"vytvoříme jednotkovou matici - stačí vynásobit 2. a 3. řádek číslem $\frac{-1}{4}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

A jsme hotovi - **inverzní matice** k zadané matici se nachází na místě **"pravé** matice", tj.

$$A^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 3. *Určete inverzní matici k matici* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ *pomocí algebraických doplňků.*

Řešení. Opět budeme postupovat podle postupu uvedeného pro výpočet inverzní matice - pomocí algebraických doplňků - podle (3) vypočteme inverzní matici jako:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}^T.$$

Nejdříve vypočteme determinant matice A (dle Sarussova pravidla):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 0 + 8 + 4 - 2 - 0 = 4$$

Nyní postupně vypočteme jednotlivé algebraické doplňky:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = +(-6 - 2) = -8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2 + 1) = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(0 - 8) = 8$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = +(6 - 4) = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = +(0 + 4) = 4$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +(-1 - 0) = -1$$

Vypočtené algebraické doplňky dosadíme do vzorce (3) s tím, že matici ve vzorci rovnou transponujeme, tj. prvky A_{11}, A_{12} a A_{13} zapíšeme do 1. sloupce, prvky A_{21}, A_{22} a A_{23} do 2. sloupce a prvky A_{31}, A_{32} a A_{33} do 3. sloupce:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}}.$$

1.3 Příklady k procvičení

Příklad 1. *K dané matici A určete matici inverzní a to jednak pomocí ekvivalentních úprav a jednak pomocí algebraických doplňků.*

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Řešení. a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2 Geometrie: Vlastní čísla a vlastní vektory

2.1 Teorie

Již dříve jsme se setkali s určitým charakteristickým číslem dané matice - determinantem. V této části se budeme zabývat hledáním jiných charakteristických čísel - λ, které jsou řešením rovnice $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$, kde A je zadaná matice řádu n. Znalost řešení takové rovnice má řadu aplikací, nejen v matematice, ale třeba v kvantové chemii.

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n, kde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá *vlastní* nebo *charakteristické číslo* matice A, jestliže splňuje pro některý nenulový vektor $\vec{u}$ rovnici

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}. \tag{1}$$

Vektor $\vec{u}$ se nazývá *vlastní* nebo *charakteristický vektor* příslušný k λ.

Maticovou rovnici $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ lze dále upravit:

$$
\begin{aligned}
A\vec{u} - \lambda\vec{u} &= 0 \\
(A - \lambda E)\vec{u} &= 0. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$(A - \lambda E)\vec{u} = 0$ je homogenní soustava n lineárních rovnic o n neznámých[3] . Protože podle předpokladu musí být vlastní vektor nenulový (dle jeho definice), musí mít soustava nenulové řešení. To je splněno za podmínky, že determinant matice soustavy $|A - \lambda E| = 0$.

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice řádu n, kde $a_{ij} \in \mathbb{C}$.
Rovnice

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad (3)$$

se nazývá *charakteristická rovnice* matice A, determinant $|A - \lambda E|$ se nazývá *charakteristický polynom* matice A.

Řešením charakteristické rovnice jsou vlastní čísla matice A. Jelikož charakteristický polynom je n-tého řádu, řešením charakteristické rovnice dostaneme n, ne nutně různých, vlastních čísel matice A.

2.2 Řešené příklady

Příklad 1. *Určete vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice* $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristickou rovnici matice A (podle (3)):

$$
\begin{aligned}
\left| \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| &= 0 \quad [4] \\
\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3-\lambda)(-\lambda) - (-1)2 &= 0 \\
-3\lambda + \lambda^2 + 2 &= 0 \; . \\
\lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Snadno zjistíme, že kořeny charakteristického polynomu jsou $\underline{\underline{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2}}$, což jsou hledaná vlastní čísla matice A.

Vlastní vektory příslušné k jednotlivým vlastním číslům získáme dosazením $\lambda_{1,2}$ do rovnice (2): $(A - \lambda E)\vec{u} = 0$.

Pro $\lambda_1 = 1$ dostáváme:

[3] Místo 0 na pravé straně rovnice by se přesněji měl psát nulový vektor $\vec{o}$.

[4] Charakteristickou rovnici tedy snadno získáme rovnou tak, že v determinantu matice A odečteme λ na hlavní diagonále.

$$
\begin{aligned}
(A-1E)\vec{u} &= 0\\
\left[\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} 3-1 & -1\\ 2 & 0-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$
\begin{array}{rcrcl}
2u_1 & - & u_2 & = & 0\\
2u_1 & - & u_2 & = & 0
\end{array}.
$$

Použitím Gaussovy eliminační metody určíme ekvivalentní soustavu:

$$2u_1 - u_2 = 0.$$

Položíme $u_1 = t$ a dostaneme $u_2 = 2t$. Řešení soustavy je tedy tvaru $(t, 2t), t \in \mathbb{C}$. Každý násobek vektoru $\underline{\underline{(1, 2)}}$ je vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$.

Pro $\lambda_2 = 2$ analogicky dostáváme:

$$
\begin{aligned}
(A-2E)\vec{u} &= 0\\
\begin{pmatrix} 3-2 & -1\\ 2 & 0-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$
\begin{array}{rcl}
u_1 - u_2 & = & 0\\
2u_1 - 2u_2 & = & 0
\end{array}.
$$

Použitím Gaussovy eliminační metody určíme ekvivalentní soustavu:

$$u_1 - u_2 = 0.$$

Položíme $u_2 = t$ a dostaneme $u_1 = t$. Řešení soustavy je tedy tvaru $(t, t), t \in \mathbb{C}$. Každý násobek vektoru $\underline{\underline{(1, 1)}}$ je vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2$.

Příklad 2. *Určete vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice* $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristickou rovnici matice A (podle (3)):

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
(2-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda) - 6 - (-2-\lambda) + 6(2-\lambda) &= 0 \\
-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda &= 0 \\
-\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 1) &= 0 \\
-\lambda(\lambda - 1)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Kořeny charakteristického polynomu jsou $\underline{\underline{\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1}}$, což jsou hledaná vlastní čísla matice A.

Vlastní vektory příslušné k jednotlivým vlastním číslům získáme dosazením $\lambda_{1,2}$ do rovnice (2): $(A - \lambda E)\vec{u} = 0$.

Pro $\lambda_1 = 0$ dostáváme:

$$\begin{aligned}
(A - 0E)\vec{u} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Máme tedy soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2u_1 & - & 3u_2 & + & u_3 & = & 0 \\
u_1 & - & 2u_2 & + & u_3 & = & 0 \\
u_1 & - & 3u_2 & + & 2u_3 & = & 0
\end{array}.$$

Použitím Gaussovy eliminační metody určíme ekvivalentní soustavu:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2u_1 & - & 3u_2 & + & u_3 & = & 0 \\
 & - & u_2 & + & u_3 & = & 0
\end{array}.$$

Položíme $u_3 = t$ a dostaneme $u_1 = u_2 = t$. Řešení soustavy je tedy tvaru $(t, t, t), t \in \mathbb{C}$. Každý násobek vektoru $\underline{\underline{(1, 1, 1)}}$ je vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$.

Pro $\lambda_{2,3} = 1$ analogicky dostáváme:

$$\begin{array}{rcl} (A-1E)\vec{u} & = & 0 \\ \begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Máme tedy soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{array}{rcrcrcl} u_1 & - & 3u_2 & + & u_3 & = & 0 \\ u_1 & - & 3u_2 & + & u_3 & = & 0 \\ u_1 & - & 3u_2 & + & u_3 & = & 0 \end{array}.$$

Použitím Gaussovy eliminační metody určíme ekvivalentní soustavu:

$$u_1 - 3u_2 + u_3 = 0.$$

Položíme $u_2 = t, u_3 = s$ a dostaneme $u_1 = 3t - s$. Řešení soustavy je tedy tvaru $(3t - s, t, s), t, s \in \mathbb{C}$.

Protože řešení soustavy obsahuje dva parametry, dostaneme vlastní vektory dosazením:

$$t = 1, s = 0 : (3, 1, 0); t = 0, s = 1 : (-1, 0, 1)^{5}.$$

Každá lineární kombinace vektorů $\underline{\underline{(3, 1, 0)}}$ a $\underline{\underline{(-1, 0, 1)}}$ je vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_{2,3} = 1$.

Příklad 3. *Určete vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice* $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristickou rovnici matice A (podle (3)):

$$\begin{array}{rcl} \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} & = & 0 \\ (6-\lambda)(-1-\lambda) + 12 & = & 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 & = & 0 \end{array}$$

[5] Obecně, při větším počtu parametrů, volíme vždy jeden z parametrů roven jedné a ostatní rovny nule.

Kořeny charakteristického polynomu jsou $\underline{\underline{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3}}$, což jsou hledaná vlastní čísla matice A.

Vlastní vektory příslušné k jednotlivým vlastním číslům získáme dosazením $\lambda_{1,2}$ do rovnice (2): $(A - \lambda E)\vec{u} = 0$.

Pro $\lambda_1 = 2$ dostáváme:

$$\begin{array}{rcc} (A - 2E)\vec{u} & = & 0 \\ \begin{pmatrix} 6-2 & -4 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{array}{rcrcl} 4u_1 & - & 4u_2 & = & 0 \\ 3u_1 & - & 3u_2 & = & 0 \end{array}.$$

Použitím Gaussovy eliminační metody určíme ekvivalentní soustavu:

$$u_1 - u_2 = 0.$$

Položíme $u_2 = t$ a dostaneme $u_1 = t$. Řešení soustavy je tedy tvaru $(t, t), t \in \mathbb{C}$. Každý násobek vektoru $\underline{\underline{(1, 1)}}$ je vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$.

Pro $\lambda_2 = 3$ analogicky dostáváme:

$$\begin{array}{rcc} (A - 3E)\vec{u} & = & 0 \\ \begin{pmatrix} 6-3 & -4 \\ 3 & -1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{array}{rcrcl} 3u_1 & - & 4u_2 & = & 0 \\ 3u_1 & - & 4u_2 & = & 0 \end{array}.$$

Použitím Gaussovy eliminační metody určíme ekvivalentní soustavu:

$$3u_1 - 4u_2 = 0.$$

Položíme $u_2 = t$ a dostaneme $u_1 = \frac{4}{3}t$. Řešení soustavy je tedy tvaru $(\frac{4}{3}t, t), t \in \mathbb{C}$. Každý násobek vektoru $\underline{\underline{(\frac{4}{3}, 1)}}$[6] je vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$.

2.3 Příklady k procvičení

Příklad 1. *Určete vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice A:*

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení. a) $\lambda_1 = -1, \vec{u} = (t, -2t), t \in \mathbb{C}; \lambda_2 = 5, \vec{u} = (t, t), t \in \mathbb{C}$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \vec{u} = (t, t), t \in \mathbb{C}$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \vec{u} = (t, 0, 0), t \in \mathbb{C}$

d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \vec{u} = (t, s, -s), t, s \in \mathbb{C}; \lambda_3 = 2, \vec{u} = (t, t, 0), t \in \mathbb{C}$

Literatura

[1] Horák - Lineární algebra

[2] Horák - Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I

[3] http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/13_MI_KAP

[4] http://www.vscht.cz/mat/MCHI/1_prednaska.pdf

[5] Janyška - Analytická geometrie

[6] resp. vektoru $(4, 3)$