Přibližné vyjádření funkce

Mgr. Zdeněk Kříž, Ph. D. a Mgr. Veronika Švandová

Obsah

1 Diferenciál funkce **2**

1.1 Teorie 2

1.2 Řešené příklady 3

1.3 Příklady k procvičení 3

2 Taylorův polynom **4**

2.1 Teorie 4

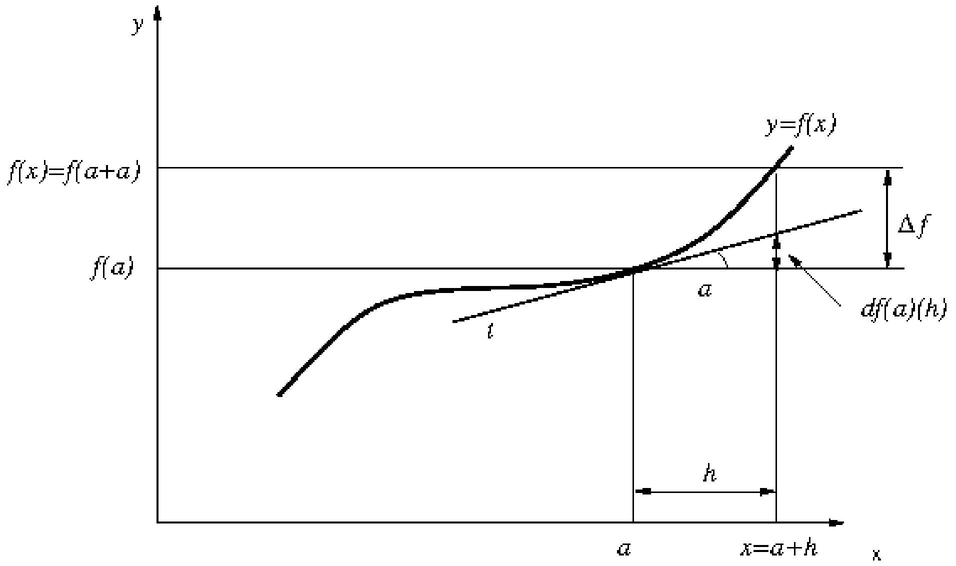
2.2 Řešené příklady 4

2.3 Příklady k procvičení 5

V této kapitole si ukážeme dva způsoby přibližného vyjádření funkce v blízkosti jejího libovolného bodu. První přístup bude používat rychlejší, ale méně přesnou aproximaci, druhý přístup bude sice složitější, ale výpočetně náročnější metodu.

1 Diferenciál funkce

Při tomto přístupu nahrazujeme danou funkci v blízkosti zadaného bodu její tečnou v daném bodě. Situaci znázorňuje následující obrázek. Intuitivně již cítíme, že tato aproximace je výhodná ve velmi blízkém okolí daného bodu a se zvětšující se vzdáleností od tečného bodu narůstá chyba aproximace.



OBRÁZEK 1: Diferenciál funkce

1.1 Teorie

Nechť má funkce $f(x)$ v bodě a spojitou derivaci $f'(a)$. Diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě a při přírustku $h \in R$ nazýváme číslo $df(a)(h) = f'(a)h$.

Jak je vidět z předcházejícího obrázku, platí: $\tan\alpha = f'(a) = \frac{df(a)}{h} \Rightarrow df(a)(h) = f'(a)h$.

Přírustkem funkční hodnoty $\Delta f(a)$ nazveme diferenci funkce $f(x)$ mezi body a a $a + h$. Přírustek h proměnné x obvykle značíme $h = x - a = dx$.

Pokud má funkce $y = f(x)$ v bodě a spojité derivace až do řádu n včetně (to znamená, že existují derivace $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$). Diferenciálem řádu n funkce $f(x)$ v bodě a při přírustku $h \in R$ nazýváme číslo:

$$d^n f(a)(h) = f^{(n)}(a)h^n$$

Diferenciály (i vyšších řádů) bývá zvykem značit:

$$df(a)(h) = f'(a)h = f'(a)dx = f'(a)(x-a).$$

Pokud pro výpočet funkční hodnoty v bodě $a+h$ použijeme diferenciál, dopustíme se určité chyby, kterou lze vyjádřit následovně:

$$R(h) = |\Delta f(a) - df(a)(h)|$$

a dále platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

1.2 Řešené příklady

Příklad 1. *Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližnou hodnotu funkce* $f(x) = \arctan(x)$ *v bodě* $a = 0.98$.

Řešení. Nejdříve si zvolíme vhodný funkční bod, pro který snadno vypočítáme funkční hodnotu a který je dostatečně blízko bodu $a = 0.98$. Jako nejvhodnější se jeví bod $a = 1$ pro funkci $y = \arctan(x)$. Nejdříve vypočteme přirustek funkce $h = x - a = 0.98 - 1.00 = -0.02$. Pro výpočet diferenciálu budeme nejprve potřebovat první derivaci zadané funkce. Ta je rovna $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$. Hodnota první derivace v bodě $x = 1$ je rovna $(\arctan(1))' = \frac{1}{2}$.

Příklad 2. *Vypočtěte diferenciál funkce* $f(x) = \sin(x)$.

Řešení. Protože v tomto příkladu není zadán ani bod a a ani přírustek funkce h, bude výpočet pouze obecný. Nejdříve vypočítáme první derivaci zadané funkce $f'(x) = \cos x$. Diferenciál funkce má tedy tvar:

$$df(x) = f'(x)dx = \cos x dx.$$

Příklad 3. *Pomocí diferenciálu funkce vypočtěte přibližnou hodnotu* $\sqrt{382}$.

Řešení. Nejbližší nám známý bod, pro který známe přesně hodnotu druhé odmocniny je $x_0 = 400$. Přírustek funkce $h = 382 - 400 = -18$. Funkce, pro kterou budeme počítat difeneciál má tvar $f(x) = \sqrt{x}$. Její derivace má tvar $f'(x) = \frac{1}{s\sqrt{x}}$. Po dosazení do vzorce pro diferenciál dostaneme: $f(382) = f(400) + \frac{1}{2.\sqrt{400}} = 20 + \frac{1}{40}(-18) = 20 - \frac{9}{20} \doteq 19.55$.

1.3 Příklady k procvičení

Příklad 4. *1) Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližnou hodnotu* $\ln 1.3$

2) Vypočtěte diferenciál funkce $f(x) = x^2 + x + 1$ *v bodě* $x_0 = 2$ *pro přírustek* $h = 0.1$

3) Vypočtěte diferenciál funkce $f(x) = x^3$ *v bodě* $x_0 = 4$.

4) Vypočtěte diferenciál funkce $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *v bodě* $x_0 = 1$

Řešení. 1) 0.3

2) 0.5

3) $48h$

4) $\frac{\sqrt{2}}{2}h$

2 Taylorův polynom

V předchozí kapitole jsme pro výpočet funkční hodnoty v daném bodě použili aproximaci funkce pomocí přímky, tedy pomocí lineární funkce - polynomu prvního stupně. Ukázali jsme si, že tato aproximace může být velmi nepřesná. V této kapitole si ukážeme aproximaci pomocí polynomů vyšších stupňů. Ukážeme si, že tato aproximace je mnohem přesnější a můžeme si sami určit stupeň polynomu v závislosti na požadované chybě.

2.1 Teorie

Pokud ná funkce $f(x)$ v intervalu $< a, a+h >$ (pro záporné h v intervalu $< a+h, a >$ spojité derivace až do řádu n včetně a dále v intervalu $(a, a+h)$, resp. $(a+h, a)$ spojitou derivaci (n+1) - řádu, pak polynom

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1}$$

nazveme Taylorovým polynomem a výraz R_{n+1} nazveme Taylorovým zbytkem.

Přepíšeme-li přírustek h ve tvaru $h = x - a$, dostaneme častěji používaný tvar Taylorova polynomu:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}$$

Taylorovým polynomem stupně n v bodě a nazýváme polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Zvláštním případem Taylorova polynomu je polynom v bodě $a = 0$. Tento polynom se nazývá Maclaurinův polynom. Tento polynom má tedy tvar:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

2.2 Řešené příklady

Příklad 5. *Zapište Taylorův polynom 5. stupně pro funkci $f(x) = e^x$ v okolí bodu $a = 0$*

Řešení. Nejprve musíme určit derivace funkce až do stupně 5. Je ale zřejmé, že derivace funkce $f(x) = e^x$ je rovna $f'(x) = e^x$. Funkce v bobě $a = 0$ i její derivace nabývají hodnoty $e^0 = 1$. Taylorův polynom bude tedy mít tvar:

$$T_5(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5.$$

Příklad 6. *Funkci $y = \cos x$ v okolí bodu $x_0 = 0$ nahraďte polynomem čtvrtého stupně.*

Řešení. Opět nejdříve vypočítáme derivace až do 4 stupně (pokud existují) a určíme jejich funkční hodnotu v bodě x_0. Také určíme funkční hodnotu funkce $f(x) = \cos(0)$. Řada derivací a jejich funkční hodnoty budou vypadat následovně: $f(0) = \cos 0 = 1, f'(0) = -\sin 0 = 0,$

$$f''(0) = -\cos(0) = -1, f'''(0) = sin(0) = 0, f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1.$$

Maclaurinův polynom má tedy tvar:

$$f(x) = \cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

2.3 Příklady k procvičení

Příklad 7. *1) Vyjádřete Maclaurinův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = \sin(x)$.*

2) Vyjádřete Taylorův polynom 3. stupně pro funkci $f(x) = \sqrt[5]{x}$ v bodě $x_0 = 1$.

3) Vyjádřete Maclaurinův polynom 3. stupně pro funkci $f(x) = xe^{-x}$.

4) Vyjádřete Taylorův polynom 4. stupně pro funkci $f(x) = e^x \sin(x)$.

Řešení. 1) $\sin(x) = 0 + x - \frac{1}{3!}x^3$.

2) $T_3(x) = 1 + \frac{1}{5}(x-1) - \frac{2}{25}(x-1)^2 + \frac{6}{125}(x-1)^3$

3) $x \cdot e^{-x} = 0 + x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4$.

4) $e^x \sin(x) = 0 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!}$.