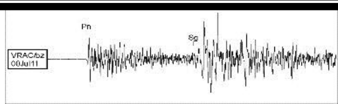
Zpracování seismických dat

část A: Seismický signál jako vlnová funkce

I. Seismický signál jako funkce času

Josef Havíř
havir@ipe.muni.cz

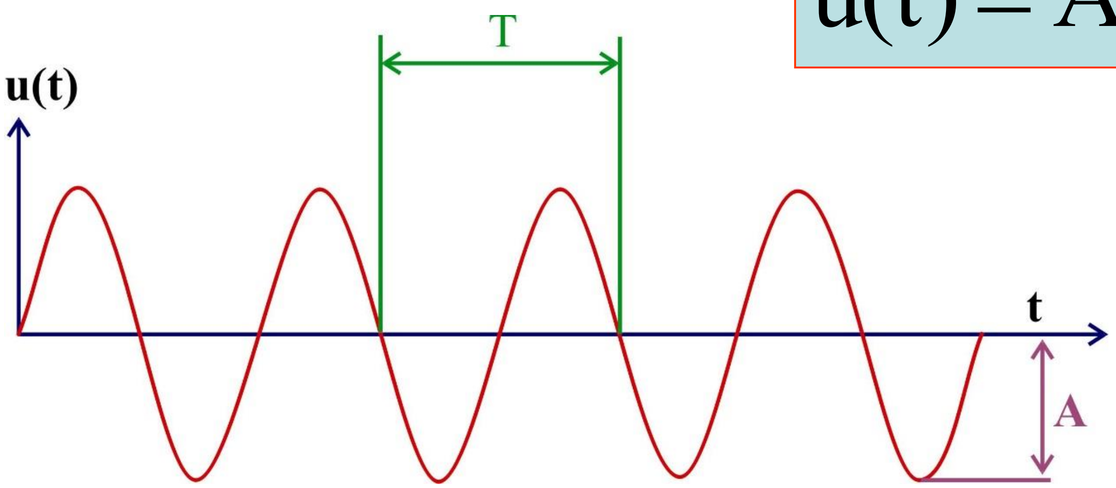


a) vlnová funkce jako součet goniometrických funkcí

Představme si seismický signál jako jednoduchou harmonickou vlnu.

V případě, že tato vlna vyjadřuje posunutí, projevuje se v daném bodě kontinua kmitáním s frekvencí f (respektive periodou T, T=1/f) a amplitudou A, tj. s výchylkou u(t):

$$u(t) = A\sin(2\pi.f.t)$$



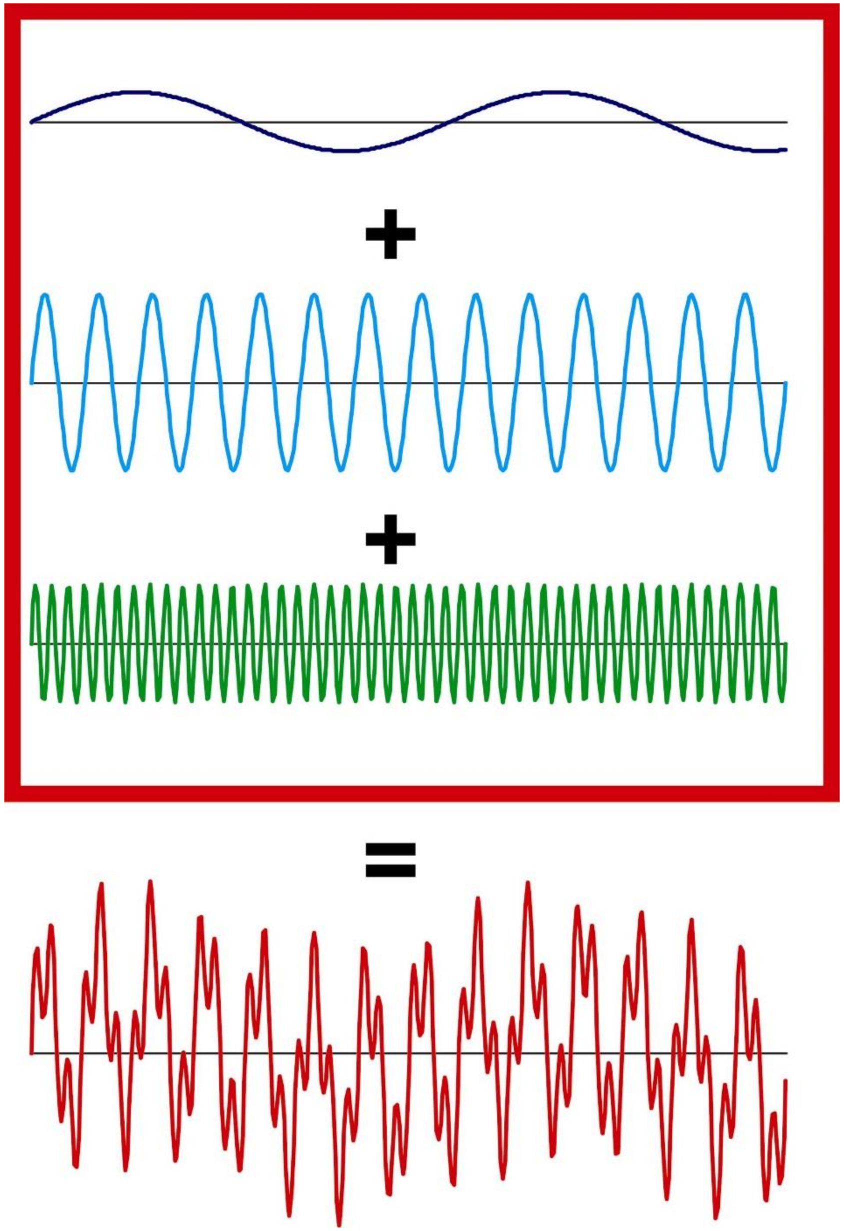
Příklad součtu tří vlnových funkcí:

$$u_1(t) = 10.\sin(2\pi.0{,}9.t)$$

$$u_2(t) = 30.\sin(2\pi.7.t)$$

$$u_3(t) = 20.\sin(2\pi.23.t)$$

$$u_4(t) = 10.\sin(2\pi.0{,}9.t) + \\ + 30.\sin(2\pi.7.t) + 20.\sin(2\pi.23.t)$$



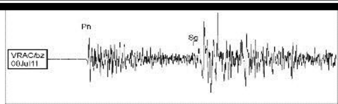
b) Fourierova řada

Každou jakkoli složitou a nepravidelnou vlnovou funkci lze popsat jako součet mnoha křivek funkcí sinus a cosinus (**Fourierova řada**)

$$u(t) = a_0 + [a_1 cos(2\pi f_0 t) + b_1 sin(2\pi f_0 t)] +$$
$$+ [a_2 cos(2\pi 2 f_0 t) + b_2 sin(2\pi 2 f_0 t)] +$$
$$\ldots + [a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi n f_0 t)]$$

Joseph Fourier (1768-1830)

$$\boxed{u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi n f_0 t)]}$$



Koeficienty a_n a b_n ve Fourierově řadě kvantifikují míru zastoupení sinusovek o frekvenci n.f v součtu reprezentujícím celkovou vlnovou funkci.

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi n f_0 t)]$$

určuje míru zastoupení sinusovek o dané frekvenci v celkovém signálu

jejich vzájemný poměr určuje fázi

určuje sledovanou frekvenci

Výhodou vyjádření Fourierovy řady pomocí goniometrických funkcí je relativně snadná představitelnost významu jednotlivých parametrů.

Nevýhodou je existence dvou koeficientů pro jednu frekvenci a nesnadnost integrace goniometrických funkcí.

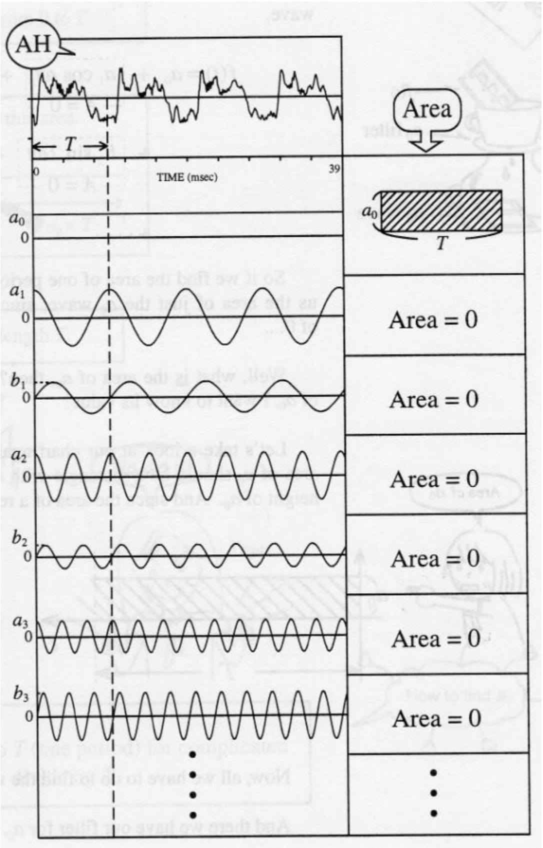
c) konstanty Fourierovy řady

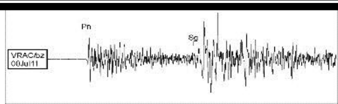
konstanty a_0, a_n a b_n si můžeme obecně vyjádřit.

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi n f_0 t)]$$

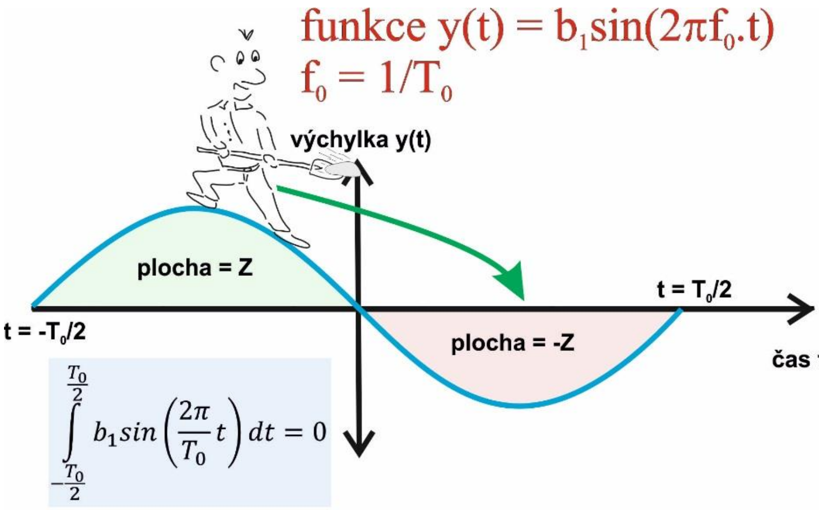
Rozložme vlnovou funkci pro periodu T_0 (předpokládejme periodickou funkci o základní periodě T_0) do součtu sinusovek a konstanty a_0.

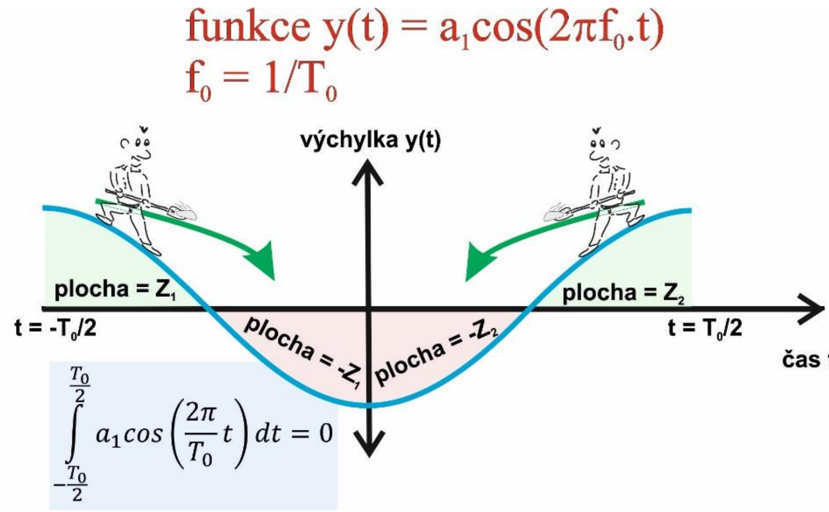
Nyní můžeme sledovat plochu vymezenou křivkami jednotlivých členů. Přitom plocha vymezená křivkou libovolné spojité funkce y(t) odpovídá hodnotě určitého integrálu dané funkce.



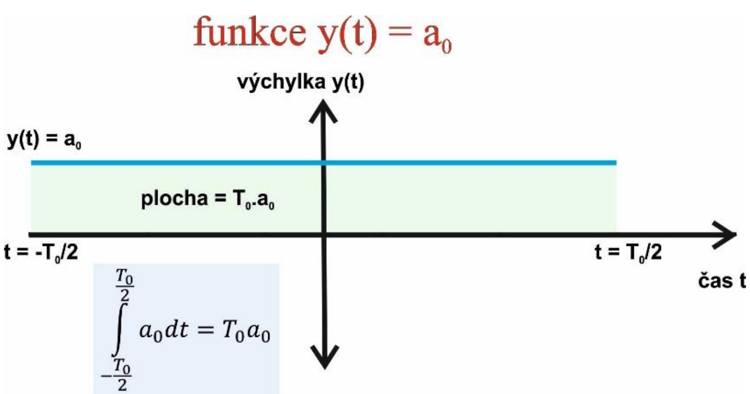


Vidíme, že plocha Z vymezená jednotlivými sinusovkami, je nulová.





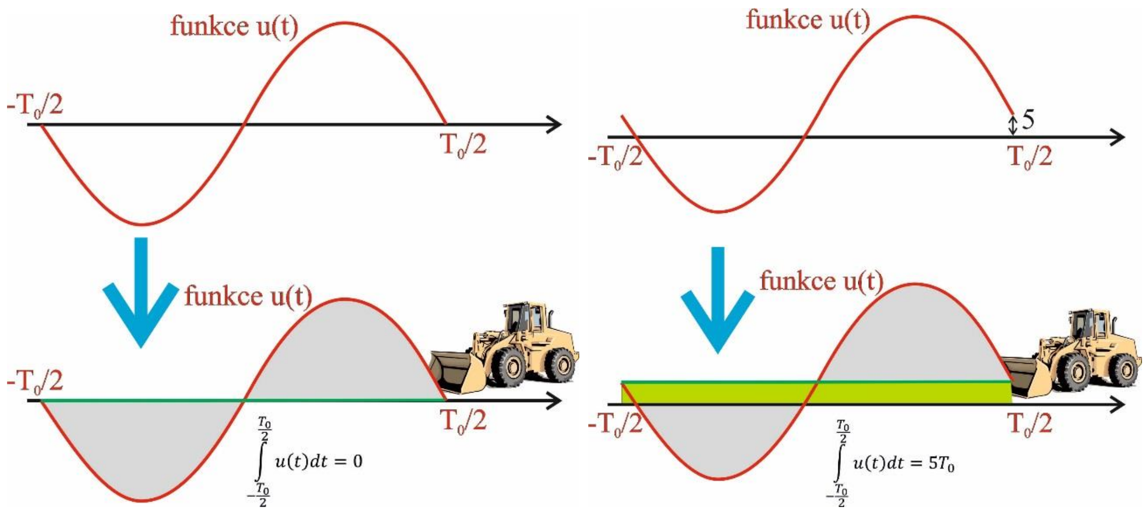
Plocha vymezená křivkou a_0 je rovna součinu $a_0.T_0$. Tj. také velikost plochy vymezené vlnovou funkcí u(t) odpovídá součinu $a_0.T_0$.

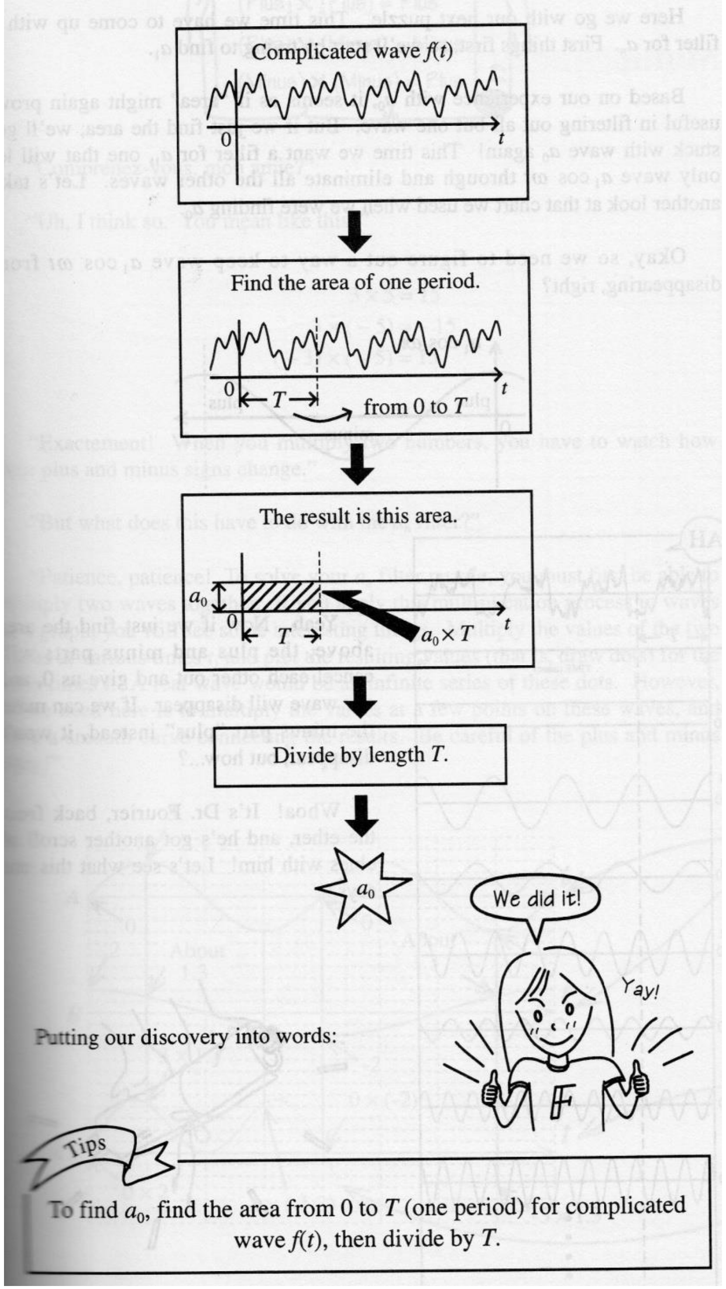


$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi n f_0 t)]$$

Velikost plochy vymezené vlnovou funkcí u(t) odpovídá součinu $a_0.T_0$.

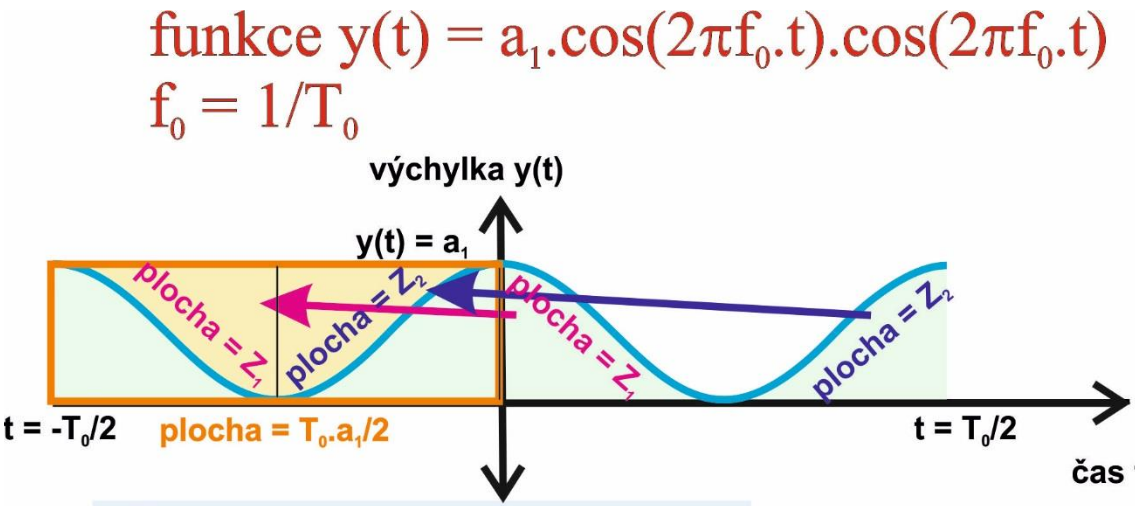
$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)dt = T_0 a_0 \qquad a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)dt$$



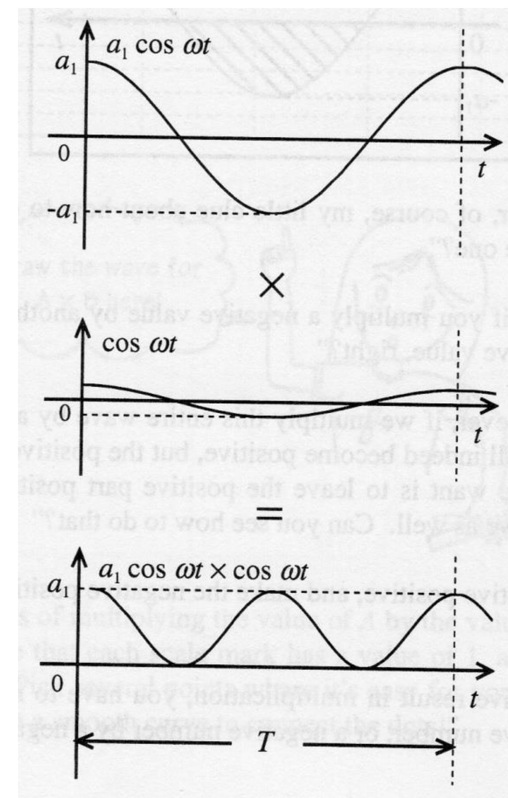


Dále vynásobme vlnovou funkci u(t) výrazem cos(2π.t/T_0) a podívejme se, jakou plochu nyní budou vymezovat jednotlivé křivky Fourierovy řady.

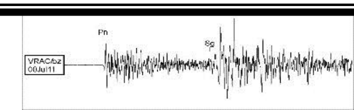
Křivka a_1.cos(2π.t/T_0).cos(2π.t/T_0) vymezuje plochu a_1.(T/2):



$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_1 cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt = \frac{T_0 a_1}{2}$$

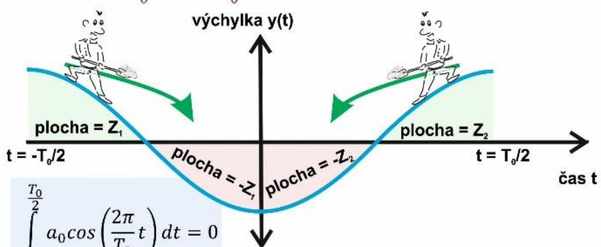


$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(2\pi n f_0 t) + b_n sin(2\pi n f_0 t)]$$



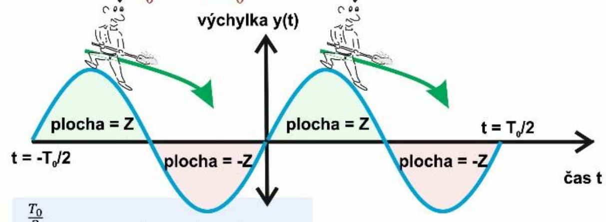
Plochy vymezené všemi ostatními křivkami jednotlivých členů Fourierovy řady jsou nulové.

funkce $y(t) = a_0\cos(2\pi f_0.t)$
$f_0 = 1/T_0$



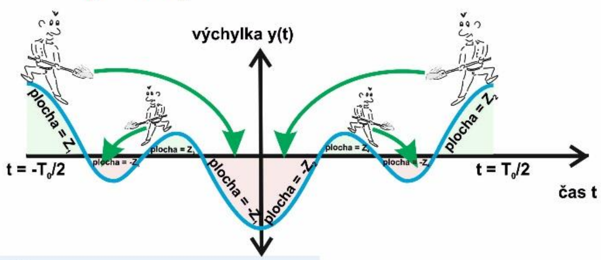
$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_0 cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt = 0$$

funkce $y(t) = b_1\sin(2\pi f_0.t)\cos(2\pi f_0.t)$
$f_0 = 1/T_0$



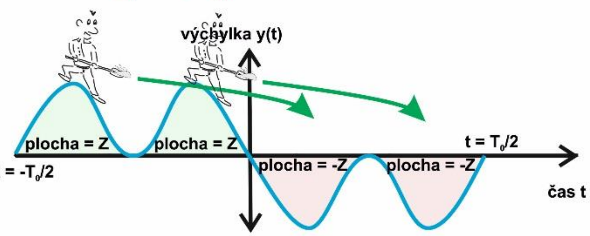
$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} b_1 sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt = 0$$

funkce $y(t) = a_2.\cos(2\pi 2f_0.t).\cos(2\pi f_0.t)$
$f_0 = 1/T_0$

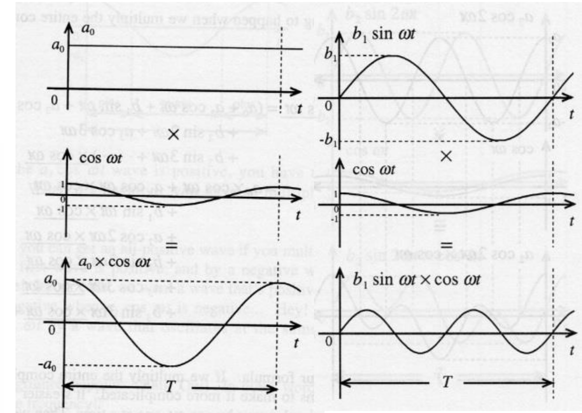


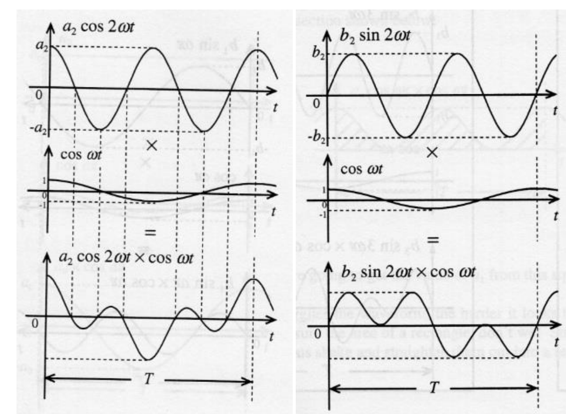
$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} a_2 cos\left(2\frac{2\pi}{T_0}t\right)cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt = 0$$

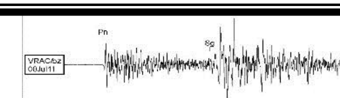
funkce $y(t) = b_2\sin(2\pi 2f_0.t)\cos(2\pi f_0.t)$
$f_0 = 1/T_0$



$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} b_2 sin\left(2\frac{2\pi}{T_0}t\right)cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt = 0$$





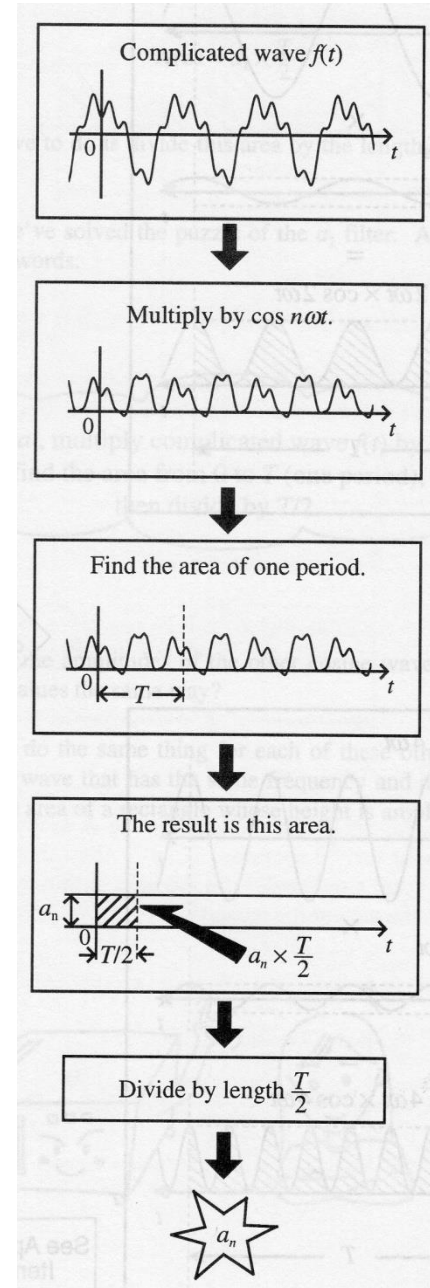


Je tedy zřejmé, že velikost plochy vymezené vlnovou funkcí $u(t).\cos(2\pi.t/T_{0)}$ odpovídá součinu $a_1.(T_0/2)$.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt = a_1\frac{2}{T_0} \qquad a_1 = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt$$

Analogicky lze ukázat, že platí:

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)cos\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt = a_n\frac{2}{T_0} \quad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)cos\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt$$

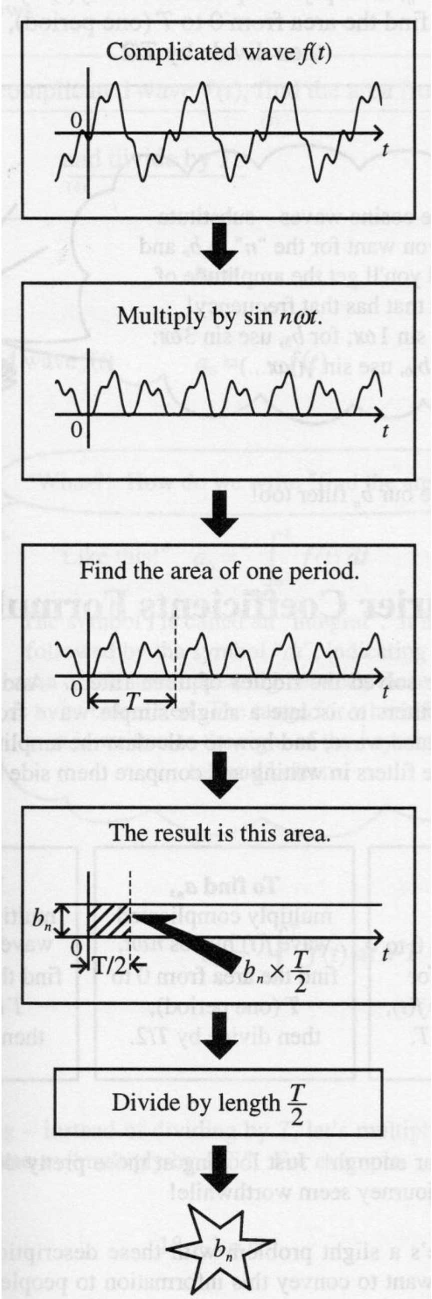


Stejně bychom mohli odvodit, že velikost plochy vymezené vlnovou funkcí $u(t).\sin(2\pi.t/T_0)$ odpovídá součinu $b_1.(T_0/2)$.

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt = b_1\frac{2}{T_0} \qquad b_1 = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt$$

Analogicky lze ukázat, že platí:

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt = b_n\frac{2}{T_0} \qquad b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt$$



Pro konstanty Fourierovy řady tedy platí obecné vztahy:

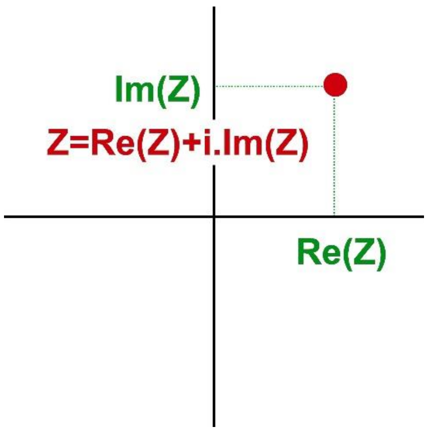
$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)dt$$

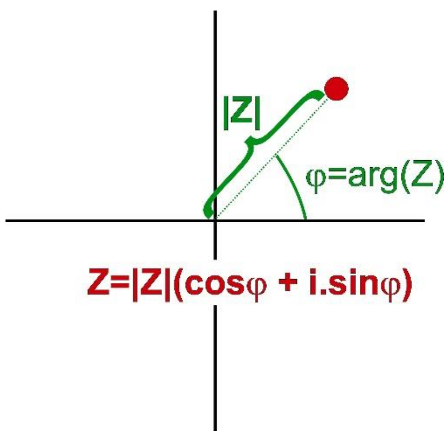
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)cos\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} u(t)sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt$$

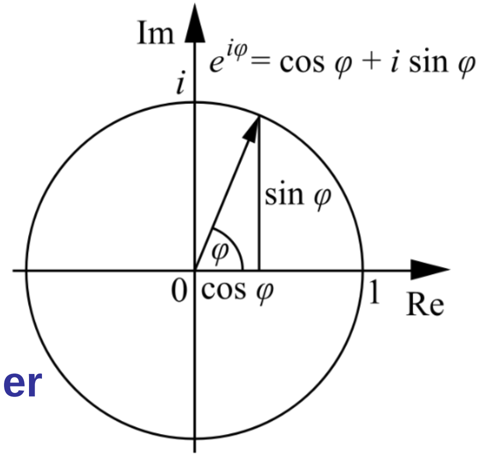
d) komplexní tvar Fourierovy řady

Nevýhody vyjádření Fourierovy řady pomocí goniometrických funkcí řeší komplexní tvar Fourierovy řady. Vychází z geometrického významu komplexního čísla a z tzv. Eulerovy věty.

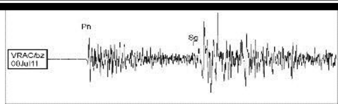




Leonhard Paul Euler (1707-1783)



$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in2\pi f_0 t}$$



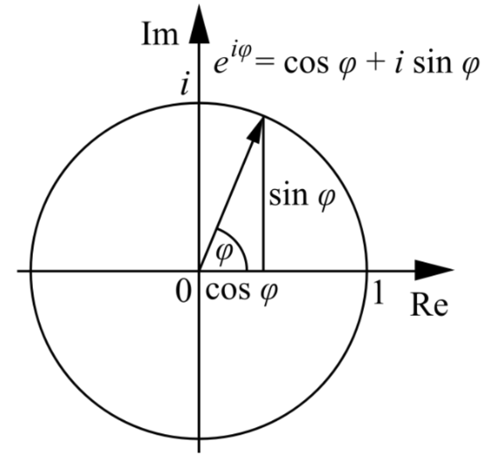
vyjdeme z eulerova vzorce: $$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi$$

provedeme substituci: $$\varphi = n\omega t$$

získáme vztahy:

$$e^{in\omega t} = \cos n\omega t + i.\sin n\omega t$$

$$e^{-in\omega t} = \cos n\omega t - i.\sin n\omega t$$



vhodným součtem těchto vztahů si vyjádříme goniometrické funkce:

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right)$$

$$\sin n\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}\right)$$

Do rovnice Fourierovy řady můžeme dosadit komplexní členy:

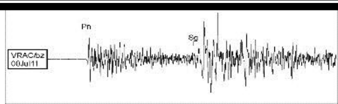
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right)$$

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} \right)$$

$$\sin n\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} \right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} \right) \right]$$



Rovnici můžeme upravit a zjednodušit:

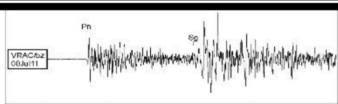
$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} \left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} \right) \right]$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(a_n - ib_n \right) e^{in\omega t} + \frac{1}{2} \left(a_n + ib_n \right) e^{-in\omega t} \right]$$

$$A_n = \frac{1}{2} \left(a_n - ib_n \right) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-in\omega t} dt$$

$$B_n = \frac{1}{2} \left(a_n + ib_n \right) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{in\omega t} dt$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{in\omega t} + B_n e^{-in\omega t} \right]$$



Vyjdeme-li ze vztahu:

$$A_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-in\omega t}dt$$

Lze ukázat, že rozšíříme-li n na všechna celá čísla (tj.i na hodnotu 0 a na záporná čísla,pak platí:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-i0\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = a_0$$

$$A_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-i(-n)\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{in\omega t}dt = B_n$$

V komplexním tvaru si tedy můžeme všechny koeficienty (a_0, A_n, B_n) vyjádřit jediným koeficientem, rozšíříme-li n na všechna celá čísla, a Fourierovu řadu můžeme zjednodušit na tvar:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$

Kde:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-in\omega t}\,dt$$

Komplexní tvar převádí goniometrické funkce sinus a cosinus na vyjádření pomocí exponenciální funkce e^x s komplexní proměnnou.

V tomto tvaru si pak můžeme všechny koeficienty (a_0, a_n, b_n) vyjádřit jediným (ovšem komplexním) koeficientem.

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in2\pi f_0 t}$$

určuje míru zastoupení sinusovek o dané frekvenci v celkovém signálu

protože je to komplexní číslo, zahrnuje také informaci o fázi

určuje sledovanou frekvenci