Bilineární formy - pokračování

$f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$, U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$f(-, u) : U \longrightarrow \mathbb{K}$ lineární

$f(v, -) : U \longrightarrow \mathbb{K}$ lineární

α báze prostoru U $\quad \alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

Matice bilin. formy f v bázi α je matice A taková, že

$$A_{ij} = f(u_i, u_j)$$

$u, v \quad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$f(u, v) = \sum_{i,j} A_{ij} x_i y_j = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T A y$$

2

Změna matice při změně báze

α ...... matice f v α je A

β ...... matice f v β je B

Potom

$$B = P^T A P \qquad P = (id)_{\alpha\beta} \text{ matice přechodu}$$

$\Longrightarrow$ Matice A a B jsou kongruentní

Symetrická bilineární forma je bilineární forma $f: U \times U \to K$ s vlastností

$$f(u,v) = f(v,u)$$

pro všechna $u, v \in U$. Speciálně pro matici formy f v bázi α dostaneme

$$A_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = A_{ji}$$ Matice A je tedy SYMETRIC

3

Budeme se zabývat nyní těmito formami.

ALGORITMUS

Tento algoritmus pro danou čtvercovou symetrickou matici A najde diagonální matici D a regulární matici P tak, že

$$D = P^T A P$$

Opakování: řádkové a sloupcové úpravy a jejich realizace pomocí násobení ~~el~~ elementárními maticemi zleva a zprava.

Výměna dvou řádků: $A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} r_2(A) \\ r_1(A) \end{pmatrix}$

e… operace

$$e(E)\,A = e(A)$$

4

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_1(A) & s_2(A)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_2(A) & s_1(A\end{pmatrix}$$

Matice $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ reprezentuje výměnu 1. a 2. řádku, jestliže ji násobíme zleva, a matice $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^T$ reprezentuje výměnu 1 a 2 sloupce, jestli ji násobíme zprava

Násobení 1 řádku číslem a .... $\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}$

e

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot A = \begin{pmatrix}a\, r_1(A)\\ r_2(A)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, s_1(A) & s_2(A) \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ realizuje násobení 1 řádku, jestliže matici násobíme zleva

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ realizuje násobení 1. sloupce číslem a, jestliže matici násobíme zprava

K 1 řádku přičtem a-násobek 2 řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} r_1(A) + a\, r_2(A) \\ r_2(A) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1(A) + a\, s_2(A) & s_2(A) \end{pmatrix}$$

6

$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ je přičtení a-násobku 2. řádku k 1. řádku (násobíme-li ji zleva)

$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}$ je přičtení a-násobku 2. sloupce k 1 sloupci (násobíme-li touto maticí zprava)

$$A \xrightarrow[\text{řádkové a sloupcové úpravy}]{\text{stejné}} B = P_k^T \dots P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \dots P_k$$

stejné řádk. a sl. úpravy

$$= (P_1 P_2 \dots P_k)^T A \cdot (P_1 P_2 \dots P_k) = P^T A P$$

Algoritmus Nechť A je čtvercová symetrická matice. Pak stejnými řádkovými a sloupcovými úpravami, lze matici

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

kde D je diagonální a platí $D = P^T A P$.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

k 1 řádku přičteme 2 řádek

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

8

k 1. sloupci ~ přičteme 2. sloupec

$$\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}$$

3. řádek a 2. řádek vynásobíme $\sim^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 12 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

násobíme 2. a 3. sloupec číslem 2

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 24 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}$$

od 2. a 3. řádku odečteme násobek 1. řádku ~

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) \sim$$

totéž se sloupci

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & \\ 1 & 1 & -5 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \end{array}\right.$$

9

k 3. řádku přičteme 2. řádek a pak uděláme totéž pro sloupce

$$
\sim \begin{array}{ccc|ccc}
4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\
\hline
1 & -1 & -5 & & & \\
1 & 1 & -5 & & & \\
0 & 0 & 2 & & &
\end{array}
\sim
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ P \\ \\
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\multicolumn{3}{c|}{D} & \multicolumn{3}{c}{P^T} \\
4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\
\hline
1 & -1 & -6 & & & \\
1 & 1 & -4 & & & \\
0 & 0 & 2 & & &
\end{array}\right)
$$

$$
D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} \qquad
P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad
P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
D = P^T A P
$$

(10)

Věta: Nechť $f: U \times U \to \mathbb{K}$ je symetrická bilin. forma. Pak v U existuje báze B taková, že v této bázi je matice f diagonální, tj. v souřadnicích báze B má f vyjádření

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} x_i y_i$$

kde $(u)_B = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$, $(v)_B = (y_1, y_2, \dots y_n)^T$.

Důkaz. Zvolme si vektory $u_1, u_2 \dots u_n$ a $v_1, v_2, \dots v_n$ a pišme následující schéma

$$\begin{array}{cccc|c}
f(u_1, v_1) & \cdots & f(u_1, v_n) & & u_1 \\
f(u_2, v_1) & \cdots & f(u_2, v_n) & & u_2 \\
& f(u_i, v_j) & & & u_i \\
f(u_m, v_1) & \cdots & f(u_m, v_n) & & u_m \\
\hline
v_1 & v_j & v_n & &
\end{array}
\quad \sim_{\text{K 1.ř + 2.ř}} \quad
\begin{array}{cc|c}
\overset{f(u_1+u_2, v_1)}{f(u_1, v_1) + f(u_2, v_1)} & \cdots & u_1 + u_2 \\
f(u_2, v_1) & \cdots & u_2 \\
\hline
v_1 & v_2 &
\end{array}$$

$= f(u_1 + u_2, v_1)$

Též můžeme pracovat se sloupci!

12

Samotný důkaz. Vezmeme bázi $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ a napíšeme schéma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & \vdots & & \vdots \\ \cdots & f(u_i, u_j) & \cdots & u_i \\ & \vdots & & \vdots \\ \hline \cdots & u_j & \cdots & \\ & & & \end{array}\right)$$

Budeme provádět stejné řádkové a sloupcové operace tak, abychom dostali diagonální matici. Dostaneme.

$$\begin{array}{cccc|l} d_{11} & & 0 & & v_1 = \text{lin. kombinace } u_1 \ldots u_n \\ & d_{22} & & & v_2 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & d_{nn} & v_n \\ \hline v_1 & v_2 & \ldots & v_n & \end{array}$$

Platí $d_{ii} = f(v_i, v_i)$

$i \neq j \quad d_{ij} = 0 = f(v_i, v_j)$

Vektory $v_1, v_2, \ldots v_n$ tvoří hledanou bázi β.

13

Příklad: Mějme bilin. formu $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$$

f je symetrická

V bázi $\varepsilon = \left(e_1 = (1,0,0)^T, e_2, e_3\right)$ má matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Podle příkladu na algoritmus

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & (1\ 0\ 0) \\ 2 & 0 & 6 & (0\ 1\ 0) \\ 4 & 6 & 0 & (0\ 0\ 1) \\ \hline \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & (1\ 1\ 0) \\ 0 & -4 & 0 & (-1\ 1\ 0) \\ 0 & 0 & -96 & (-6\ {-4}\ 2) \\ \hline \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-6\\-4\\2\end{pmatrix} & \end{array}\right)$$

14

Tedy v bázi $B = \left((1,1,0)^T, (-1,1,0)^T, (-6,-4,2)^T \right)$

má bilin. forma f diagonální tvar. V souřadnicích báze B

$$f(\bar{x},\bar{y}) = 4\bar{x}_1\bar{y}_1 - 4\bar{x}_2\bar{y}_2 - 96\bar{x}_3\bar{y}_3$$

KVADRATICKÁ FORMA je zobrazení $g : U \longrightarrow K$

takové, že existuje symetrická bilin. forma $f : U \times U \longrightarrow K$

a platí

$$g(u) = f(u, u)$$

15

<u>Příklad</u>: $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

je symetrická, právě když $a_{12} = a_{21}$

$$f(x,x) = a_{11} x_1^2 + \underline{a_{12}} x_1 x_2 + \underline{a_{21}} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 =$$

$$= a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$ je kvadratická forma

Otázka: $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je kvadratická forma na $\mathbb{R}^2$

$$g(x) = b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2$$

z jaké $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ symetrické vznikla g?

16

$$= f\left(\tfrac{1}{4}x, y\right) + = f(b_{11} x_1)\, y_1 = f\left(\frac{b_{12}}{2} x_1\right) y_2 + \frac{b_{12}}{2} x_2 y_1 + b_{22} x_2 y_2$$

To je jediná možnost.

<u>Lemma:</u> Vzájemná korespondence mezi sym. bil. formami a kvadratickými formami je vzájemně jednoznačná.

<u>Důkaz:</u> $f : U \times U \to \mathbb{K}$ bilin. sym. forma, pak příslušná kvadratická forma je podle definice

$$g(u) = f(u, u)$$

17

Označení. Nechť $g: U \to \mathbb{K}$ je kvadratická forma. Potom příslušná bilin. forma je $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$f(u,v) = \frac{1}{4}\Big(g(u+v) - g(u-v)\Big)$$

Máme tedy

$g(u) = \tilde{f}(u,u)$. Proto

$$\frac{1}{2}\Big(g(u+v) - g(u-v)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{f}(u+v,u+v) - \tilde{f}(u-v,u-v)\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\tilde{f}(u,u+v) + \tilde{f}(v,u+v)} - \tilde{f}(u,u-v) + \tilde{f}(v,u-v)\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\cancel{\tilde{f}(u,u)} + \tilde{f}(u,v) + \tilde{f}(v,u) + \cancel{\tilde{f}(v,v)} - \cancel{\tilde{f}(u,u)} + \tilde{f}(u,v) + \tilde{f}(v,u) \cancel{-\tilde{f}(v,v)}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\tilde{f}(u,v)\right) = \tilde{f}(u,v)$$

Matice kvadr. formy g v bázi α je matice příslušné sym. bil. formy f. Z toho, co víme o sym. bilin. formách, můžeme usoudit, že platí

Věta Nechť $g: U \to \mathbb{K}$ je kvadratická forma. Pak existuje báze B (říká se jí POLÁRNÍ) taková, že v jejích souřadnicích je

$$g(u) = d_{11}y_1^2 + d_{22}y_2^2 + \dots + d_{nn}y_n^2$$

kde $(u)_B = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$.