JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

V předchozích přednáškách jsme měli

$$\varphi : U \to U,$$

takovými, že v U existovala báze tvořená jejich vl. vektory. (Příklad unitárních a samoadj. operátorů) v této bázi α

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Obecně taková situace nenastává. Může se totiž stát, že geom. násobnost vl. čísla < alg. násobnost.
V tomto případě hledáme bázi α takovou, aby

matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ byla ta nejjednodušší. Jedna z možností je hledat bázi α tak, aby $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ byla v tzv. JORDANOVĚ KANONICKÉM TVARU.

<u>Jordanova buňka</u> je matice $k \times k$ tvaru

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Jordanův kanonický tvar je blokově diagonální matice, kde bloky na diagonále jsou Jordanovy buňky.

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & 0 & & \\ 0 & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & 0 & \\ 0 & 0 & \boxed{J_{k_3}(\lambda_3)} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Věta o Jord. kan. tvaru: Nechť U je vekt. prostor dimenze n nad $\mathbb{K}$ a $\varphi : U \to U$ lin. operátor takový, že součet alg. násobností jeho vl. čísel $= n$. Potom existuje v U báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v Jord. kan. tvaru, přičemž tato matice je určena jednoznačně až na pořadí buněk.

Dodatek: Je-li U nekt. prostor nad $\mathbb{C}$, jsou předpoklady věty o Jord. kan. tvaru vždy splněny. (Každý polynom nad $\mathbb{C}$ má v $\mathbb{C}$ tolik kořenů, kolik činí jeho stupeň.)

Verze Jord. věty pro matice

Nechť A je matice $n \times n$ s koeficienty v $\mathbb{K}$. Nechť její charakt. polynom má n kořenů včetně násobnosti. Pak je matice A podobná matici J v Jord. kan. tvaru

$$J = P^{-1} A P,$$

kde J je určena jednoznačně až na pořadí buněk.

Důkaz maticové verze:

Mějme matici A stupně $n\times n$ nad $\mathbb{K}$. Ta určuje lin. operátor

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

Protože char. polynom matice A má n kořenů (včetně násobností) je součet alg. násobností vl. čísel operátoru φ roven n. Podle věty o JKT na φ existuje báze α v $\mathbb{K}^n$ taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v JKT. Platí

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon}\underbrace{(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}}_{A}(id)_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1}AP$$

<u>Příklad</u> $\varphi: U \to U$ má v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$

matici v JKT

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ \hline & 0 & & \lambda_2 & 1 & 0 \\ & & & 0 & \lambda_2 & \\ \hline & 0 & & & 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$

$\varphi(u_2) = u_1 + \lambda_1 u_2$

$\varphi(u_3) = u_2 + \lambda_1 u_3$

$\varphi(u_4) = \lambda_2 u_4$

$\varphi(u_5) = u_4 + \lambda_2 u_5$

$\varphi(u_6) = \lambda_2 u_6$

$\varphi(u_1) - \lambda_1 u_1 = 0 \qquad (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})(u_1) = 0$

$\varphi(u_2) - \lambda_1 u_2 = u_1 \qquad (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})(u_2) = u_1$

$\varphi(u_3) - \lambda_1 u_3 = u_2 \qquad (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})(u_3) = u_2$

$\varphi(u_4) - \lambda_2 u_4 = 0 \qquad (\varphi - \lambda_2 \mathrm{id})(u_4) = 0$

$\varphi(u_5) - \lambda_2 u_5 = u_4 \qquad (\varphi - \lambda_2 \mathrm{id})(u_5) = u_4$

$\varphi(u_6) - \lambda_2 u_6 = 0 \qquad (\varphi - \lambda_2 \mathrm{id})(u_6) = 0$

$$0 \xleftarrow{\varphi-\lambda_1 id} u_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda_1 id} u_2 \xleftarrow{\varphi-\lambda_1 id} u_3$$

řetězec pro vl. čísla λ_1 délky 3

$$0 \xleftarrow{\varphi-\lambda_2 id} u_4 \xleftarrow{\varphi-\lambda_2 id} u_5$$

řetězec pro vl. čísla λ_2 délky 2

$$0 \xleftarrow{\varphi-\lambda_2 id} u_6$$

řetězec pro vl. čísla λ_2 délky 1

Definice Řetězec pro vl. čísla λ operátoru φ délky k je posloupnost nenulových vektorů $u_1, u_2, \dots u_k$ takových, že

$$(\varphi - \lambda id) u_i = u_{i-1} \qquad i \geq 2$$

$$(\varphi - \lambda id) u_1 = 0$$

$$0 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} u_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} u_2 \longleftarrow \dots \dots \longleftarrow u_{k-1} \xleftarrow{\varphi-\lambda id} u_k$$

<u>Lemma</u> Je-li $u_1, u_2, \dots u_k$ řetězec nenulových vektorů pro vl. číslo λ operátoru φ, pak $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lineárně nezávislé.

<u>Důkaz indukcí podle k.</u>

$k = 1$ $\quad u_1 \neq \vec{o}$ je lin. nezávislé

Nechť tvrzení platí pro $k-1 \geq 1$. A mějme řetězec délky k.

Nechť

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \vec{o}$$

Aplikujme $\varphi - \lambda id$ na tuto rovnici.

$$a_1 (\varphi - \lambda id) u_1 + a_2 (\varphi - \lambda id) u_2 + \dots + a_k (\varphi - \lambda id) u_k = \vec{o}$$

$$\vec{o} + a_2 u_1 + a_3 u_2 + \dots + a_k u_{k-1} = \vec{o}$$

$u_1, \dots u_{k-1}$ je řetězec délky $k-1$. Tyto vekt. jsou LN, proto

$a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$. Dosazením dostaneme

$$a_1 u_1 = \vec{o} \implies a_1 = 0 \quad \text{Tedy } u_1, \dots u_k \text{ jsou LN.}$$

Z definice JKT vidíme, že platí:

Pravidlo 1 Na diagonále JKT jsou vl. čísla operátoru φ, každé tolikrát, kolik činí jeho alg. násobnost.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

Char. polynom φ je $\det(J - \lambda \boxed{id})$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda & 1 & & & & \\ & \lambda_1-\lambda & 1 & & 0 & \\ & & \lambda_1-\lambda & & & \\ & 0 & & \lambda_2-\lambda & 1 & \\ & & & & \lambda_2-\lambda & \\ & & & & & \lambda_2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1-\lambda)^3(\lambda_2-\lambda)^3$$

Příklad 1a

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = 2$ vl. vektor $v_1 = (1, -2, 3)^T$

$\lambda_2 = 1$ alg. násobnost 2 $v_2 = (3, 6, -8)^T$

$v_3 = (1, -1, 1)^T$

geom. násob. $= 2$

$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & \\ & \boxed{\lambda_2} & \\ & & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

JKT tvoří 3 buňkami
každá velikosti 1

Príklad 1b

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = (1, 0, 0)^T$

$\lambda_2 = 1 \qquad v_2 = (1, -1, 0)^T \qquad$ alg. násobnosť $= 2 >$ geom. nás. $= 1$

Hľadáme vektor v_3 tak, aby (v_2, v_3) tvorili reťazec pre vl. čísla 1.

$$(A - 1 \cdot E)\, v_3 = v_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x_3 &= -\frac{1}{2} \\ x_2 &= p \\ x_1 &= 1 - \frac{1}{2} - p = \frac{1}{2} - p \end{aligned}$$

$p = 0 \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

12

V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ má φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\varphi(v_1) = 2v_1$$
$$\varphi(v_2) = v_2$$
$$\varphi(v_3) = v_2 + v_3$$

JKT má dvě buňky, jednu velikosti 1 a druhou velikosti 2.

Pravidlo 2 Počet Jordanových buněk v JKT pro vlastní číslo λ je roven geom. násobnosti vl. čísla λ.

Příklad 2

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$$

2 je vl. čísla alg. násobnosti 3

Existuje až na násobek jediný vl. vektor $u_1 = (2,1,2)^T$.

Geom. násobnost vl. čísla 2 je rovna 1.

Tedy podle pravidel 1 a 2 musí být JKT tvaru matici

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Chceme najít bázi α tak, aby

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J.$$

Báze α je řetězec délky 3 začínající vl. vektorem u_1

$$0 \xleftarrow{A-2E} u_1 \xleftarrow{A-2E} u_2 \xleftarrow{A-2E} u_3$$

Po nějakém počítání dostaneme například

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

121
-112

44
-40
-1

$-11+16+1$

Tento řetězec lze hledat také „odzadu"

Náhodně zvolíme $u_3 = (1, 0, 0)^T$

Potom $u_2 = (A-2E)u_3 = (11, 4, -1)^T$

$$u_1 = (A-2E)u_2 = \begin{pmatrix} 11 & -28 & 3 \\ 4 & -10 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vl. vektor

Zvarování:

1. Lze používat pouze, má-li φ jediné vl. číslo.
2. Vyjde-li nám $u_2 = \vec{0}$ nebo $u_1 = \vec{0}$ musíme zvolit jiné u_3.

Příklad 3 $\quad \varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = AX$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^3$$

$\lambda = 2$ jediné vl. číslo alg. násobnosti 3

Vl. vektory $\quad au + bv \quad u = (2,-1,0)^T \quad$ geom. násobnost $= 2$

$v = (0,0,1)^T$

Víme: JKT musí mít 2 buňky velikosti 1 a 2. Potřebujeme najít nějaký řetězec délky 2.

Ale nevíme, kterým z vl. vektorů $au + bv$ začíná.

Hledáme $w \neq \vec{o}$ tak, aby

$$(A-2E)\,w = au + bv$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení právě když $b+2a=0$.

Zvolíme $b=-2$, $a=1$.

$au+bv = (2,-1,-2)^T$

Nějaké řešení je pak $w = (-1,1,1)$

Postáváme řetězec

$$0 \xleftarrow{A-2E} u-2v = (2,-1,-2)^T \xleftarrow{A-2E} w = (-1,1,1)$$

$$0 \longleftarrow v$$

Báze $\alpha = (u-2v, w, v)$ a v této bázi je

17

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = J \qquad J = P^{-1} A P$$

$$P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \left((u - 2v)_\varepsilon \; (w)_\varepsilon \; (v)_\varepsilon \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice 4×4

Jestliže má matice A tvaru 4×4 jediné vl. číslo alg. násobnosti 4, pak mohou nastat tyto možnosti:

geom. násobnost = 4 .... $J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & & & \\ & \boxed{\lambda} & & \\ & & \boxed{\lambda} & \\ & & & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$

geom. násobnost = 3 $\quad 4 = 2+1+1$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\lambda} & \\ & & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

geom. násobnost = 1 $\quad 4 = 4$

$$J = \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{matrix}}$$

geom. násobnost 2 $\xrightarrow[\text{(1)}]{\text{(19)}}$ $4 = 3 + 1$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{(2)}}$ $4 = 2 + 2$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ 0 & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Jak se liší (1) a (2).

$$(J - \lambda E) \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (J - \lambda E)(J - \lambda E) = 0$$

$$J - \lambda E \overset{1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \qquad (J-\lambda E)^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \neq 0$$

$$(J-\lambda E)^3 = 0$$

1. řetězec délky 3 a řetězec délky 1
2. dva řetězce délky 2

Příklad 4 $\quad \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (1+\lambda)^4$$

Vl. číslo $\lambda = -1$ má alg. násobnost 4

Vl. vektory jsou $au + bv$, $u = (1,0,3,0)^T$, $v = (0,0,1,-2)^T$

Hledáme w tak, aby

$$(A+E)w = au + bv$$

22

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 5 & 4 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 10 & 5 & 3a+b \\ -12 & 6 & 4 & 2 & -2b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 5 & 4 & 2 & a \\ -30 & 12 & 10 & 5 & 3a+b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ -12 & 5 & 4 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a-2b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a-2b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a-2b \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a-2b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení pro všechna a, b.

23

To známe, že řešením pro $a=1,\ b=0$ dostaneme řetězec

$$0 \longleftarrow u \xleftarrow{\ A+E\ } u_1 = (0,-1,0,3)^T$$

řešením pro $a=0,\ b=1$ dostaneme řetězec

$$0 \longleftarrow v \xleftarrow{\ A+E\ } v_1 = (0,-2,0,5)^T$$

V bázi $\alpha = (u, u_1, v, v_1)$ je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad P = (id)_{\varepsilon,\alpha}$$