SKALÁRNÍ SOUČIN

nad $\mathbb{R}$ sym. bil. forma pozitivně definitní

nad $\mathbb{C}$ lineární v 1. složce

$$\langle u, av + bw \rangle = \bar{a} \langle u, v \rangle + \bar{b} \langle u, w \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle} \in \mathbb{R}$$

$$\langle u, u \rangle > 0 \text{ pro } u \neq \vec{0}$$

$u_1, u_2, \ldots u_k$ jsou ortogonální vektory, jestliže

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \qquad i \neq j \qquad u_i \perp u_j$$

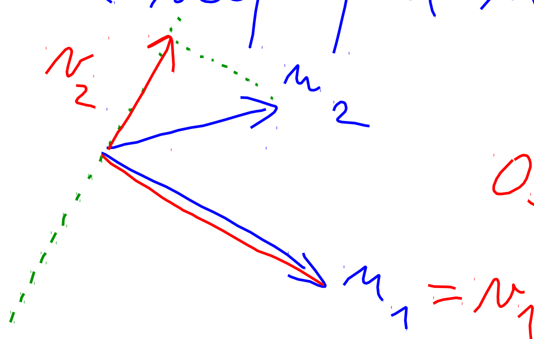
Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou <u>ortonormální</u>, jestliže

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

jinak $u_i \perp u_j$ pro $i \neq j$ a $\|u_i\| = 1$.

<u>Ortonormální báze</u> je báze tvořená ortonormálními vektory.

GRAMMŮV-SCHMIDTŮV ORTOGONALIZAČNÍ PROCES je algoritmický postup, který z množiny lin. nezávislých vektorů vytvoří ortogonální systém vektorů se stejným lin. obalem.



$$v_2 = u_2 - a u_1 \perp v_1 = u_1$$

$$0 = \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2, u_1 \rangle - a \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{\neq 0} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}$$

3

GSOP Nechť $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou LN vektory v U. Potom existují ortogonální vektory $v_1, v_2, \dots v_k$ jednoznačně určené předpisem

$$v_1 = u_1$$
$$v_2 = u_2 - a_1 v_1$$
$$v_3 = u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2$$
$$\dots$$
$$v_k = u_k - c_1 v_1 - \dots - c_{k-1} v_{k-1}$$

To znamená, že platí

$$[v_1, v_2, \dots, v_i] = [u_1, u_2, \dots u_i]$$

Důsledek: V každém prostoru se skal. součinem existuje ortonormální báze.

$u_1, u_2, \dots u_n$ nějaká báze, provedeme GSOP a dostaneme ortogonální bázi $v_1, v_2, \dots v_n$.

$$\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}$$ je ortonormální báze.

<u>Důkaz GSOP indukcí</u>: Nechť platí tvrzení pro k, dokážeme ho pro $k+1$. (Pro $k=1$ není co dokazovat, pro $k=2$ jsme to už udělali.)

$u_1, u_2, \dots, u_{k+1}$, $\quad v_1, v_2, \dots v_k$ ortogonální

$$[u_1, \dots u_k] = [v_1, \dots v_k].$$

Hledejme v_{k+1} ve tvaru

$$v_{k+1} = u_{k+1} - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_k v_k$$

a_i spočteme vynásobením rovnice vektorem v_i.

$$0 = \langle v_{k+1}, v_i \rangle = \langle u_{k+1}, v_i \rangle - a_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_{=0} \underset{=0}{-\dots} a_i \underset{\neq 0}{\langle v_i, v_i \rangle} \underset{=0}{-\dots}$$

$$a_i = \frac{\langle u_{k+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

Takovou volbou a_i máme zaručeno, že $v_{k+1} \perp v_1, v_2, \dots v_k$

Navíc vidíme, že

$$[u_1, \dots u_{k+1}] = [v_1, \dots v_{k+1}]$$

<u>Příklad</u> V $\mathbb{R}^3$ máme $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,2,0)$

a $u_3 = (1,1,2)$.

$v_1 = u_1 = (1,0,0)$

$v_2 = u_2 - a v_1$ $\qquad a = \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} = \frac{1}{1} = \underline{1}$

$v_2 = (1,2,0) - (1,0,0) = (0,2,0)$

$v_3 = u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2$ $\qquad b_1 = \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{1}{1} = \underline{1}$

$v_3 = (1,1,2) - 1(1,0,0) - \frac{1}{2}(0,2,0)$ $\qquad b_2 = \frac{\langle u_2, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$= (0,0,2)$

6

Věta o krásném životě s ortonormální bází

Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je ortonormální báze v U.

1. Souřadnice vektoru u v bázi α jsou

$$\left(\langle u, u_1 \rangle, \langle u, u_2 \rangle, \dots \langle u, u_n \rangle \right)^T$$

2. Skalární součin vektorů u a v v souřadnicích ortonormální báze vypadá takto

$$\langle u, v \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n} = x^T \overline{y} \quad \left(\text{kde } \overline{y} = y \text{ nad } \mathbb{R} \right)$$

kde $(u)_\alpha = (x_1, \dots x_n)^T$ a $(v)_\alpha = (y_1, y_2, \dots y_n)^T$

Dowód:

1. $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \qquad (u)_\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$$\langle u, u_1 \rangle = x_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} + x_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} + \dots + x_n \underbrace{\langle u_n, u_1 \rangle}_{=0}$$

$\langle u, u_1 \rangle = x_1$ Analogicznie dla x_i, $i \geq 2$.

2. $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \qquad v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle u_i, u_j \rangle$$

$\langle u_i, u_j \rangle = 1$ gdy $i = j$, 0 dla $i \neq j$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} = X^T \cdot \overline{Y}$$

Ortogonální doplněk

U nechť je vekt. prostor se skal. součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$M \subseteq U$ podmnožina

Ortogonální doplněk množiny M je množina

$$M^{\perp} = \{ u \in U : \forall m \in M,\ \langle u, m \rangle = 0 \}$$

Ortogonální doplněk je vektorový podprostor. $u \perp m$

$$u_1, u_2 \in M^{\perp} \quad \langle a u_1 + b u_2, m \rangle = a \underbrace{\langle u_1, m \rangle}_{0} + b \underbrace{\langle u_2, m \rangle}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow a u_1 + b u_2 \in M^{\perp}$$

<u>Věta:</u> Nechť U je vekt. prostor se skalárním součinem konečné dimenze. Nechť V je jeho podprostor. Pak

$$U = V \oplus V^{\perp}$$

<u>Důkaz:</u> Nechť V má ortonormální bázi $u_1, u_2, \dots u_k$.
Tuto bázi doplníme na bázi celého U, dostaneme $u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots v_n$. Provedeme GSOP a normalizaci (zmenšíme velikost na 1). Tím dostaneme ortonormální bázi $u_1, \dots u_k, u_{k+1}, \dots u_n$ celého U. Dokážeme, že $u_{k+1}, \dots u_n$ je báze $V^\perp$. Především u_i pro $i > k$ je kolmé na $u_1, \dots u_k$ tedy na celé V.
Nechť $u \in V^\perp$, $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n$
Násobením s u_i, $1 \leq i \leq k$ dostaneme $a_i = 0$.

$$0 = \langle \underset{\in V^\perp}{u}, \underset{\in V}{u_i} \rangle = a_i \langle u_i, u_i \rangle$$

Stačí dokázat, že
$$V \cap V^{\perp} = \{o\}$$
$u \in V \cap V^{\perp}$

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n$$
$$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k - a_{k+1} u_{k+1} - \dots - a_n u_n = O$$

Z LN plyne $a_1 = a_2 = \dots = 0$, tedy $u = \vec{o}$.

Důsledek: Každý vektor $u \in U$ lze psát jednoznačně jako součet
$$u = v + w, \text{ kde } v \in V \text{ a } w \in V^{\perp}$$

Dk: $u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$, $\underset{V}{v} = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$, $\underset{V^{\perp}}{w} = a_{k+1} u_{k+1} + \dots a_n u_n$

$a_i = \langle u, u_i \rangle$

Jednoznačnost

$$u = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$$
$$V \ni v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V^{\perp}$$
$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V \cap V^{\perp} = \{\vec{o}\}$$

10

Tedy $v_2 - v_1 = w_1 - w_2 = \vec{0}$. $v_1 = v_2$ a $w_1 = w_2$.

Kolmá projekce

Kolmá projekce prostoru U do podprostoru V je zobrazení $P : U \to V$ takové, že pro každé $u \in U$ platí

$$u = Pu + (u - Pu)$$

kde $u - Pu \in V^\perp$.

Máme-li rozklad $u = v + w$, $v \in V$, $w \in V^\perp$ je

$$Pu = v$$

(11)

Lemma Kolmá projekce $P: U \to V$ je lineární zobrazení.

Dk: Jestliže $u_1 = v_1 + w_1$, $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in V^\perp$

$u_2 = v_2 + w_2$

pak

$$a u_1 + b u_2 = \underbrace{a v_1 + b v_2}_{\in V} + \underbrace{a w_1 + b w_2}_{\in V^\perp}$$

proto $P(a u_1 + b u_2) = a P u_1 + b P u_2$

Výpočet kolmé projekce, je-li dána báze podprostoru V

(1) $u_1, u_2, \ldots u_k$ je ortonormální báze. Pak jsme viděli, že

$$P(u) = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \cdots \langle u, u_k \rangle u_k$$

(2) $u_1, u_2, \ldots u_k$ není ortonormální báze. Pu hledáme ve tvaru $Pu = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k$

a chceme, aby $u - Pu \in V^\perp \iff u - Pu \perp u_1, u_2, \ldots, u_k$

(12)

Tím dostaneme pro neznámé $a_1, a_2, \dots, a_k$ celkem k rovnic

$$\langle u - Pu, u_i \rangle = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\left\langle u - \sum_{j=1}^{k} a_j u_j, u_i \right\rangle = 0$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \langle u_j, u_i \rangle = \langle u, u_i \rangle \quad i = 1, 2, \dots k$$

$$i \longrightarrow \begin{pmatrix} \\ & \langle u_j, u_i \rangle & \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_k \rangle \end{pmatrix}$$

Grammova matice

Její det je na LN vektory $\neq 0$

Tedy soustava má jediné řešení.

13

Nechť $U = V \oplus V^\perp$ a nechť P_V je kolmá projekce do V a $P_{V^\perp}$ je kolmá projekce do $V^\perp$.

Potom platí, že

$$\mathrm{id}_U = P_V + P_{V^\perp}$$

$$\underset{}{u} = \underset{\substack{\cap \\ V}}{v} + \underset{\substack{\cap \\ V^\perp}}{w}$$

tak $P_V(u) = v$, $P_{V^\perp}(u) = w$

Proto

$$\boxed{P_V = \mathrm{id} - P_{V^\perp}}$$

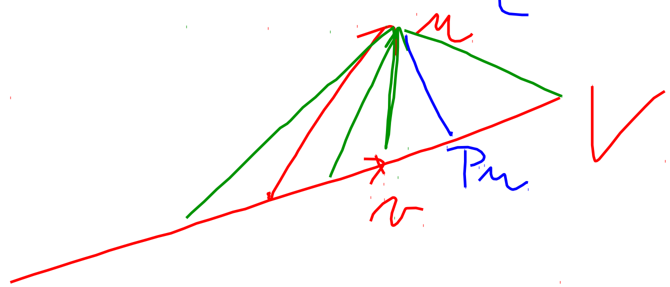
Lze výhodně použít pokud $\dim V > \dim V^\perp$

Věta – vlastnosti kolmé projekce

Nechť $P : U \to V$ je kolmá projekce.

(a) Pu je jediný vektor z V s vlastností

$$\|u - Pu\| = \min\{\|u-v\|,\ v \in V\}$$



Důkaz: $u \in U,\ v \in V$

$$\|u-v\|^2 = \|\underbrace{u-Pu}_{\in V^\perp} + \underbrace{Pu-v}_{\in V}\|^2 \overset{\text{Pyth. věta}}{=} \|u-Pu\|^2 + \|Pu-v\|^2$$

Odtud plyne, že

$$\|u-v\|^2 \ge \|u-Pu\|^2$$

a rovnost nastane, právě když $v = Pu$.