JORDANŮV KAN TVAR

Čtvercová matice je v JKT, jestliže je blokově diagonální s Jordanovými buňkami $J_k(\lambda)$ na diagonále.

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & 0 \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \lambda_0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}. \qquad J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

Věta o JKT Jestliže $\varphi : U \to U$ je lin. operátor takový, že součet alg. násobností jeho vl. čísel je roven dimenzi U, pak v U existuje báze α taková, že v této bázi je $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ v JKT.
Tento tvar je určen jednoznačně až na pořadí buněk.

Verze pro matice

Nechť A je matice n×n taková, že součet alg. násobností jejích vlastních čísel je roven n. Pak je matice A podobná matici J v JKT, tj.

$$J = P^{-1}AP$$

přičemž J je určená jednoznačně až na pořadí buněk.

Minule věta o JKT => maticová verze.

Pravidlo 1 pro počítání JKT

Na diagonále JKT jsou vlastní čísla operátoru φ, každé tolikrát, kolikrát činí jeho násobnost.

Důkaz: Char. polynom operátoru φ je $\det(J - \lambda E)$, který má kořeny stejné jako jsou prvky na diagonále.

Příklad 1a $\quad \varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -4 & -9 & -6 \\ 6 & 15 & 10 \end{pmatrix}$

ε stand. báze (e_1, e_2, e_3)

$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A$

Char. polynom je $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$

$\lambda_1 = 2$ alg. nás. 1, vl. vektor $v_1 = (1,-2,3)^T$

$\lambda_2 = 1$ alg. nás. 2, vl. vektory $v_2 = (3,6,-8)^T$

$v_3 = (1,-1,1)^T$

$\alpha = (v_1, v_2, v_3)$

$\varphi(v_1) = 2v_1 = \underline{2}v_1 + \underline{0}\cdot v_2 + \underline{0}\cdot v_3$

$\varphi(v_2) = v_2 = \underline{0}\cdot v_1 + \underline{1}\cdot v_2 + \underline{0}\cdot v_3$

$\varphi(v_3) = v_3 = \underline{0}\cdot v_1 + \underline{0}\cdot v_2 + \underline{1}\cdot v_3$

$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$ 3 buňky velikosti 1

Příklad 1b

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x) = Bx \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Char. polynom je $(2-\lambda)(1-\lambda)^2$

Vl. čísla

$\lambda_1 = 2$ alg. nás. 1 $\qquad v_1 = (1,0,0)^T$

$\lambda_2 = 1$ alg. nás. 2 $\qquad v_2 = (1,-1,0) \qquad \mathrm{Ker}(B-E) = [v_2]$

geom. nás. je 1

Tedy podle pravidla 1 musí být uhlopříčka JKT následující:

$$\begin{matrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{matrix}$$

ale JKT nemůže mít 3 buňky, jinak by geom. násobnost vl. čísla 1 byla 2.

JKT musí tedy vyjít

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Jak najdeme bázi α tak, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Pro vl. čísla 2 vezmeme vl. vektor v_1.

Pro vl. čísla 1 musíme najít řetězec délky 2, tj. (v_2, v_3)

$$(B - 1\cdot E)\, v_2 = 0 \qquad v_2 \text{ je vl. vektor}$$

$$(B - 1\cdot E)\, v_3 = v_2$$

Hledáme vektor v_3 takový, že platí

$$(B - E)\, v_3 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6

$$v_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$v_3 = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_1) = Bv_1 = 2v_1 = 2v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$\varphi(v_2) = Bv_2 = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$\varphi(v_3) = Bv_3 = v_2 + v_3 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$$

Navíc $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (id)_{\varepsilon,\alpha}$

$$J = P^{-1} \, B \, P$$

kde $P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Pravidlo 2

Počet buněk v JKT s vlastním číslem λ je roven geom. násobnosti vl. čísla λ.

Důkaz: Buňky v JKT korespondují s řetězci. Na začátku každého řetězce je vlastní vektor. Tyto vl. vektory pro různé buňky musí být lin. nezávislé. Tedy jejich počet je geom. násobnosti vl. čísla λ.

Řetězec $(v_1, v_2, \dots, v_k)$

$$0 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_2 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_3 \; \cdots\cdots \; v_{k-1} \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_k$$

v_1 je vlastní vektor

Příklad 2

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(x) = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 13 & -28 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Char. polynom je $(2-\lambda)^3$

$\lambda_1 = 2$ je vl. číslo alg. nás. 3
geom. nás. 1 vl. vektor je $u_1 = (2,1,2)^T$

Podle pravidel 1 a 2 je JKT

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proto musíme najít bázi α ve formě řetězce délky 3, který začíná vektorem u_1. Řešíme úlohy

$$\left.\begin{aligned} (A-2E)\,u_2 &= u_1 \\ (A-2E)\,u_3 &= u_2 \end{aligned}\right\} \ \dots\dots$$

Jedno možné řešení je

$$u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

V bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$.

Jiná možnost nalezení řetězce (pouze v případě jednoho vl. čísla)

Je vektor u_3 „uhodnout" a u_2, u_1 spočítat

$$u_2 = (A-2E)u_3$$
$$u_1 = (A-2E)u_1$$

Správný vektor u_3 je takový, že spočítané u_2 i u_1 jsou $\neq \vec{o}$

Volba $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dává $u_2 = (A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_1 = (A-2E)\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ je to vl. vektor

V bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ je $(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Volba $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tak $u_2 = (A-2E)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_1 = (A-2E)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

je špatná.

Příklad 3

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

Char. polynom je $(2-\lambda)^3$

$\lambda = 2$ je vl. číslo alg. nás. 3

geom. nás. 2 vl. vektory $u = (2,-1,0)^T$

$v = (0,0,1)^T$

Podle pravidel 1 a 2 obsahuje JKT dvě buňky, jedna má velikost 1 a druhá 2.

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Potřebujeme najít bázi α, která se skládá ze dvou řetězců. Jeden délky 2 a jeden délky 1 (vl. vektor).

Musíme najít vl. vektor, kterým může začínat řetězec délky 2. Hledáme ho ve tvaru $au + bv$, jako vektor, pro který má řešení soustava

$$(A-2E)X = au + bv$$

Přidružená soustava má tuto matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ -2 & -4 & 0 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 2a \\ -1 & -2 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b \end{array}\right)$$

Řešení existuje právě když $2a+b=0$. Zvolíme $a=1, b=-2$

$w_1 = au + bv = u - 2v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ a spočítáme w_2 jako řešení soustavy $(A-2E)w_2 = w_1$. Např. $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bázi α vezmeme takto $\alpha = (\underbrace{w_1, w_2}_{\text{řetězec délky } 2}$, vlastní vektor lin. nezávislý s $w_1)$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Lze i hádáním:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_1 = (A - 2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ vl. vektor

(v_1, v_2) je řetězec délky 2

Musíme doplnit lin. nezávislý vl. vektor $v_3 = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$B = (v_1, v_2, v_3) \qquad (\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Dimenze 4

Situace je složitější; neplatí pravidla 1 a 2 nám v některých případech neurčí JKT jednoznačně.

λ je vl. číslo alg. násobnosti 4, geom. násobnosti 2

na diagonále JKT je číslo λ a JKT má dvě buňky. To nám dává dvě možnosti:

13

$$J_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

zde neexistuje řetězec délky 3

$$J_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

zde existuje řetězec délky 3

$$(J_1 - \lambda E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(J_1 - \lambda E)^2 = 0$$

$$(J_2 - \lambda E) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right)$$

$$(J_2 - \lambda E)^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right) \neq 0$$

Začínáme s maticí A, která má vl. čísla λ alg. násobnosti 4 a geom. násobnosti 2. Jak rozhodneme, která z matic J_1 a J_2 je podobná matici A?

① $A = Q^{-1} J_1 Q$

$$(A-\lambda E) = Q^{-1} J_1 Q - \lambda E = Q^{-1}(J_1 - \lambda E) Q$$

$$(A-\lambda E)^2 = \left[Q^{-1}(J_1-\lambda E)Q\right]\cdot\left[Q^{-1}(J_1-\lambda E)Q\right] =$$

$$= Q^{-1}(J_1-\lambda E)^2 Q = Q^{-1}\, 0 \cdot Q = 0$$

②

$$A = Q^{-1} J_2 Q$$

$$(A-\lambda E)^2 = Q^{-1}\underbrace{(J_2-\lambda E)^2}_{\neq 0} Q \neq 0$$

Příklad 4

$\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Char. polynom φ: $(1+\lambda)^4$

Vl. čísla $\lambda = -1$ alg. nás. 4 a geom. nás. 2

Vl. vektory $u = (1,0,3,0)^T$, $v = (0,0,1,-2)^T$

Chceme najít nějaký řetězec délky 2. Hledáme a, b tak, aby soustava

$$(A+E)w = au + bv$$

Zjistíme, že taková soustava má řešení pro všechna a i b!

Řetězec délky 2 může začínat vektorem u i lin. nezávislým vektorem v. Tedy existují 2 lin. nezávislé řetězce délky 2.

Proto má JKT dvě buňky velikosti 2.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

16

Teď stačí řetězce spočítat:

$$(A+E)\,\bar{u} = u \qquad (A+E)\,\bar{v} = v$$

$$\bar{u} = (0,-1,0,3)^T \qquad \bar{v} = (0,-2,0,5)^T$$

$$\alpha = (\underbrace{u, \bar{u}}_{\text{1. řetězec}}, \underbrace{v, \bar{v}}_{\text{2. řetězec}})$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & & \\ \hline 0 & & -1 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$J = P^{-1} A P \qquad P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad 5 $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

Char. polynom je $(1-\lambda)^4$

Vl. čísla $\lambda = 1$ alg. nás. 4, geom. nás. 2

Vlastní vektory $u = (0,1,0,1)^T$, $v = (-2,0,3,0)^T$

Pro která $a, b \in \mathbb{R}$ má rovnice $(A-E)w = au + bv$ řešení?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & -2 & 10 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Má řešení právě když $a+6b=0$

Zvolíme $a = -6$, $b = 1$. $\quad -6u + v = (-2, -6, 3, -6)^T$

Řešení soustavy $(A - E)\,w = -6u + v$ je

$$w = \left(\tfrac{1}{3}, -1, 0, 0\right)^T + a_1 u + b_1 v$$

Toto bude 2. vektor řetězce délky 3. Hledáme proto taková a_1, b_1, že existuje 3. vektor, tj. existuje řešení soustavy

$$(A - E)\,z = \left(\tfrac{1}{3}, -1, 0, 0\right)^T + a_1 u + b_1 v$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -2 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -1 + a_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array}\right)$$

Má řešení právě když $-1 + a_1 + 6b_1 = 0$

Zvolíme $a_1 = 1$, $b_1 = 0$. Potom

$$w = \left(\tfrac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T \qquad z = \left(0, 0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)^T$$

(19)

Řetězec délky 3 je tedy

$(-6u+v, w, z)$. Báze α je tvořena tímto řetězcem

a vlastním vektorem, který je LN s $-6u+v$, např. u.

$\alpha = (-6u+v, w, z, u)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Řešení „hádáním".

Zvolíme vektor u_3 a spočítáme $u_2 = (A-E)u_3$, $u_1 = (A-E)u_2$.

Pokud $u_2 \neq \vec{o}$, $u_1 \neq \vec{o}$, máme řetězec délky 3.

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} u_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ LN s u_1

20

V bázi $B = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ je rovněž

$$(\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right).$$