BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

Budeme pracovat se symetrickými maticemi $n \times n$.

Elementární řádkové a sloupcové operace na matici se realizují pomocí násobení tzv. elementárními maticemi.

(1) násobení 1. řádku číslem a

původní matice A, matice po této el. operaci bude $e(A)$

$$e(A) = e(E)\cdot A = \begin{pmatrix} a & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} A$$

násobení 1. sloupce číslem a

$$e(A) = A \cdot e(E) \qquad A \cdot \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

$$(e(E))^T = e(E)$$

2 Výměna 1. a 2. řádku

$$e(A) = e(E) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

Totéž pro sloupce

$$e(A) = A \cdot e(E) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e(E))^T = e(E)$$

jednotková matice

3 K 1. řádku přičteme a-násobek 2. řádku

$$e_r(A) = e_r(E)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} A$$

K 1. sloupci přičteme a-násobek 2. sloupce

$$e_s(A) = A\cdot e_s(E) = A\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ a & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$e_r(E)^T = e_s(E)$$

4

Lemma Jestliže na matici A provádíme stejné řádkové i sloupcové operace, dostaneme matici tvaru

$$P_k \cdots P_2 P_1 A P_1^T P_2^T \cdots P_k^T$$

$$= (P_k P_2 \cdots P_1) A (P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1)^T$$

$$= P A P^T$$

Z dané symetrické matice dostaneme matici kongruentní.
Všechny matice $P_1, P_2, \ldots P_k$ mají determinant $\neq 0$, tedy P i P^T mají $\det \neq 0$, jsou to regulární matice.

Algoritmus Nechť A je symetrická matice, potom stejnými řádkovými i sloupcovými operacemi, působícími na matici dostaneme

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{řádk.} \\ \text{i sloupcové} \\ \text{el. operace}}]{\text{stejné}} \left(\begin{array}{c|c} D & P \\ \hline P^T & \end{array}\right)$$

kde D je diag. matice a platí, že

$$D = PAP^T$$

Příklad:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \xrightarrow{\text{k 1. ř. přičteme 2. ř.}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right. \xrightarrow{\text{stejná úprava}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{2 \cdot 2.\,ř. \\ 2 \cdot 3.\,ř.}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 12 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Ještě tato úprava}}$$

(7)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 24 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) \xrightarrow[\text{od 3. ř odečteme } 5\times 1.\text{ ř}]{\text{od 2. ř. odečteme 1. ř}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) \xrightarrow{3.\text{ ř} + 2.\text{ ř}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

Totéž pro sloupce

$$\begin{array}{cc} D & P \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -6 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

$$P^T$$

K matici A (symetrické) jsme našli diagonální matici D a matici P takovou, že

$$D = PAP^T$$

Souvislost s bilin. formami

Hledáme bilin. formu $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$$

$$f(x,y) = f(y,x)$$

Matice této bilin. formy je ve stand. bázi $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ rovna

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1, e_3) = 4$$
$$f(e_1, e_2) = 2$$
$$f(e_2, e_3) = 6$$

Pomocí předchozího algoritmu $f(e_i, e_i) = 0$ najdeme matici $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix}$ takovou, že

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} = \overset{P}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \overset{P^T}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

10

Matice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix}$ musí být maticí bilineární formy f v nějaké bázi B.

Jak tuto bázi najdeme

$$\underset{B}{D} = (id)_{EB}^{T} \underset{E}{A} (id)_{EB} = PAP^{T}$$

Tedy $(id)_{EB} = P^{T}$

je vyjádření prvků báze B pomocí prvků stand. báze E

$$B = (v_1, v_2, \ldots v_n) = \underbrace{(e_1, e_2, \ldots, e_n)}_{E} P^{T}$$

v_1 je 1. sloupec P^{T}

v_2 je 2. sloupec P^{T} atd.

(11)

Báze B je $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

V této bázi má f matici diagonální. V souřadnicích báze B je

$$f(u,v) = 4\bar{x}_1\bar{y}_1 - 4\bar{x}_2\bar{y}_2 - 96\bar{x}_3\bar{y}_3$$

kde $(u)_B = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$ a $(v)_B = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{pmatrix}$.

12

Věta: Pro každou symetrickou bilin. formu $f: U \times U \to \mathbb{K}$ lze (mnoha způsoby) najít bázi B takovou, že v jejích souřadnicích má bilin. forma tvar

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\, \overline{x}_i\, \overline{y}_i$$

kde $(u)_B = \overline{x}$ a $(v)_B = \overline{y}$.

Takovou bázi nazýváme polární bází bilin. formy.

Důkaz + trochu modifikovaný algoritmus

Nechť f má v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ matici $A = (a_{ij})$

$$\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \\ \hline u_1\ u_2 \ldots u_n & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} a_{ij} = f(u_i, u_j) & u_i \\ \hline u_j & \end{array}$$

u_i ← i-tý řádek $= f(u_i, u_j)$

j-tý sloupec → u_j

Po element. řádk. a sloupc. operacích zůstane každá vlastnost zachována

K 1. řádku přičteme 2. řádek

$$f(u_1+u_2, u_j) = f(u_1, u_j) + f(u_2, u_j) = a_{1j}+a_{2j}$$

$$\begin{array}{c|c} a_{1j} & u_1 \\ \hline u_j & \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|c} a_{1j}+a_{2j} & u_1+u_2 \\ \hline u_j & \end{array}$$

Algoritmus je

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \\ \hline u_1 \dots u_n & \end{array}\right) \xrightarrow[\text{a sloup. úpravy}]{\text{stejné řádk.}} \left(\begin{array}{c|c} D & \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \\ \hline v_1 \dots v_n & \end{array}\right)$$

Závěr: D je matice lin. formy f v bázi $B = (v_1, \dots, v_n)$

Kvadratická forma $q: U \to \mathbb{K}$

je takové zobrazení, ke kterému existuje symetrická bilin. forma $f: U \times U \to \mathbb{K}$ tak, že

$$q(u) = f(u,u)$$

Příklad: $f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$

$$q(x) = f(x,x) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3$$

Lemma

Každá kvadratická forma q určuje jednoznačně symetrickou bilin. formu.

Příklad: $q(x) = 8x_1^2 - 3x_1x_2 + 9x_2x_3 \qquad q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 8x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + \frac{9}{2}x_2y_3 + \frac{9}{2}x_3y_2$$

Důkaz: Jestliže $q(u) = f(u,u)$ a f je symetrická, $u,v \in U$

$$\overset{q(u+v)}{f(u+v,u+v)} - \overset{q(u-v)}{f(u-v,u-v)} = \cancel{f(u,u)} + f(u,v) + f(v,u) + \cancel{f(v,v)} - \cancel{f(u,u)} + f(u,v) + f(v,u) - \cancel{f(v,v)}$$

$$= 4f(u,v) \implies f(u,v) = \frac{1}{4}\big(q(u+v) - q(u-v)\big)$$

Nutná podmínka pro f je tedy

$$(*) \qquad f(u,v) = \frac{1}{4}\Big(q(u+v) - q(u-v)\Big)$$

Víme-li, že q je kvadratická a definujeme-li f pomocí $(*)$ lze ukázat

(1) f je symetrická a bilineární forma

(2) $f(u,u) = \frac{1}{4}\Big(q(2u) - q(\vec{0})\Big) = \frac{1}{4}\, 4\, q(u) - 0$

$= q(u)$.

Definice: Matice kvadratické formy $q : U \to \mathbb{K}$ v bázi α je matice příslušné symetrické bilin. formy f v bázi α.

Ke q najdeme f, k f najdeme $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = f(u_i, u_j)$, a to je matice kvadr. formy.

Důsledek předchozí věty

Ke každé kvadratické formě $q : U \to \mathbb{K}$ existuje báze B taková, že v jejích souřadnicích je

$$q(u) = b_{11}\overline{x}_1^2 + b_{22}\overline{x}_2^2 + \dots + b_{nn}\overline{x}_n^2$$

Příklady – připomenutí

sym. bilin. formy na $\mathbb{R}^n$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = (x_1 \dots x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$= x^T A y \qquad A \text{ je symetrická}$$

Příslušné kvadr. formy

$$q(x) = f(x,x) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ a_{ij}=a_{ji}}}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

$$= (x_1 \dots x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^T A x$$