Ortogonální a unitární operátory

U vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$\varphi : U \to U$ lin. operátor je unitární (nad $\mathbb{C}$), ortogonální (nad $\mathbb{R}$), jestliže

$$\forall u, v \in U: \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Vlastnosti

(1) Zachovává délky vektorů $\|\varphi(u)\| = \|u\|$

(2) Zachovává odchylky vektorů

(3) Zobrazuje ortonormální bázi $u_1, \dots, u_n$ na ortonormální bázi $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$

2

Příklad v $\mathbb{R}^2$ ... otočení o úhel α

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Jak vypadají unitární operátory $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_i \in \mathbb{C}$$

$\forall x, y \in \mathbb{C}^n$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$(Ax)^T \overline{Ay} = x^T \overline{y}$$

$$x^T \underline{A^T \overline{A}}\, y = x^T \underline{E}\, \overline{y}$$

Tedy $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

právě když

$$A^T \overline{A} = E$$

Unitární matice $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ jsou definovány vlastností

$$A^T \overline{A} = E.$$

Jak vypadají ortogonální operátory $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ $\qquad \varphi(x) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x_i \in \mathbb{R}$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$$

$$(Ax)^T Ay = x^T y$$

$$x^T \underline{A^T A}\, y = x^T \underline{E}\, y$$

Opět $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ platí když

$$A^T A = E$$

Takové matice se nazývají ortogonální

Tvrzení: Je-li $\varphi : U \to U$ ortogonální (unitární) a α je ortonormální báze v U, pak

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} \text{ je ortogonální (unitární)}$$

Dk nad $\mathbb{R}$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

$$(\varphi(u))_\alpha^T \cdot (\varphi(v))_\alpha = (u)_\alpha^T \cdot (v)_\alpha$$

$$\left((\varphi)_{\alpha,\alpha}(u)_\alpha\right)^T \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha}(v)_\alpha = (u)_\alpha^T \cdot (v)_\alpha$$

$$(u)_\alpha^T \underbrace{(\varphi)_{\alpha,\alpha}^T \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha}}_{=E} (v)_\alpha = (u)_\alpha^T \, E \, (v)_\alpha$$

Tedy $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je ortogonální.

Pro unitární matice platí $A^{-1} = \overline{A}^T$

$$\overline{A} A^T = E$$
$$\overline{\overline{A}}\,\overline{A^T} = \overline{E} = E$$
$$A \cdot \overline{A}^T = E$$

Pro ortogonální matice platí

$$A^{-1} = A^T$$

Jak na matici poznáme, že je ortogonální?

(1) Násobíme $A^T A = E$

(2) Platí pro sloupce $\langle s_i(A), s_i(A) \rangle = 1$

$$\langle s_i(A), s_j(A) \rangle = 0 \quad i \neq j$$

(6)

Lemma Determinant ortogonální matice je 1 nebo −1.
Determinant unitární matice má absolutní hodnotu 1.

Dk: Pro unitární $\quad A^T \cdot \overline{A} = E \quad / \det$

$$\det(A^T \cdot A) = \det E$$

$$\det A^T \cdot \det \overline{A} = 1$$

$$\det A \cdot \overline{\det A} = 1$$

$$|\det A|^2 = 1$$

$$|\det A| = 1$$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$$
$$= |a+ib|^2$$

Vlastní čísla a vl. vektory unitárních a ortog. operátorů

(1) Vlastní čísla mají abs. hodnotu 1.

(2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.

Dk: Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $u \neq \vec{o}$

$$\underbrace{\langle u,u\rangle}_{\neq 0} = \langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle u,u\rangle = |\lambda|^2 \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\neq 0}$$

Proto $|\lambda| = 1$.

u, v vlastní vektory

(2) λ, μ dvě různá vl. čísla, $\varphi(u) = \lambda u$, $\varphi(v) = \mu v$

$$\langle u, v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \langle \lambda u, \mu v\rangle = \lambda \overline{\mu} \langle u, v\rangle$$

$$\langle u, v\rangle (1 - \lambda \overline{\mu}) = 0$$

Kdyby $1 - \lambda\overline{\mu} = 0$, pak by $\lambda \overline{\mu} = 1$

$$\lambda \frac{\overline{\mu}}{|\mu|^2} = 1 \qquad \mu \cdot \frac{\overline{\mu}}{|\mu|^2} = \frac{\mu\overline{\mu}}{|\mu|^2} = 1$$

$$\lambda \mu^{-1} = 1$$

$\lambda = \mu$ spor s předpokladem

Když $1 - \lambda\overline{\mu} \neq 0$, pak $\langle u, v\rangle = 0$.

9

Věta o unitárních operátorech (pro ortogonální neplatí)

Pro každý unitární operátor $\varphi : U \to U$ existuje v U ortonormální báze α složená vlastními vektory operátoru φ. V této bázi

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla.

Důkaz: Indukcí. Je-li $n = \dim U = 1$, je φ tvaru

$$\varphi(u) = \lambda u$$

a tedy $\frac{u}{\|u\|}$ je hledaná ortonormální báze.

Nechť tvrzení platí pro dimenze $n-1$.

Mějme $\dim U = n$ a unitární operátor $\varphi : U \to U$

Char. polynom operátoru φ je polynom stupně n v komplexním oboru a v tomto oboru má alespoň jeden kořen $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

λ_1 je vlastní číslo a existuje k němu vl. vektor $v_1 \in U$.

Uvažujme $[v_1]^\perp$. To je podprostor v U dimenze $n-1$.

Stačí dokázat, že $[v_1]^\perp$ je invariantní vůči φ a pak použít indukční předpoklad.

$[v_1]^\perp$ je invariantní

$u \in [v_1]^\perp$ a spočítejme $\langle \varphi(u), v_1 \rangle$

$$\langle \varphi(u), v_1 \rangle = \left\langle \varphi(u), \frac{1}{\lambda_1}\varphi(v_1) \right\rangle = \overline{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} \langle \varphi(u), \varphi(v_1) \rangle = \lambda_1 \langle u, v_1 \rangle$$

$$\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 \qquad = \lambda_1 \cdot 0 = 0$$

Tato znamená, že

$$\varphi(u) \in [v_1]^\perp.$$

Nyní vezme restrikci operátoru φ na podprostor $[v_1]^\perp$

$$\varphi/_{[v_1]^\perp} : [v_1]^\perp \longrightarrow [v_1]^\perp$$

Tento operátor zachovává skal. součin, je unitární a podle indukčního předpokladu existuje ve $[v_1]^\perp$ ortonormální báze $v_2, v_3, \dots v_n$ tvořená z vlastních vektorů.

Potom $v_1, v_2, \dots v_n$ je ortonormální báze v U tvořená vlastními vektory.

$$\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1$$
$$\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha = (v_1, \dots v_n)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

12

Pro ortogonální operátory věta neplatí

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Tento operátor nemá v $\mathbb{R}$ žádné vl. čísla, pokud $\alpha \neq k\pi$

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2}$$

$$= \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha \notin \mathbb{R}$$

$$\alpha \neq k\pi$$

Ortogonální operátory v dimenzi 2

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = Ax \qquad A$ má sloupce velikosti 1 navzájem kolmé

2 možnosti

1. $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, kde $a^2+b^2=1$

   a $\det A = a^2+b^2 = 1$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, kde $a^2+b^2=1$

   $\det A = -a^2-b^2 = -1$

V prvním případě je

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\det A = 1$

a zobrazení $\varphi(x) = Ax$ je otočení o úhel α.

V druhém případě kdy $\det A = -1$

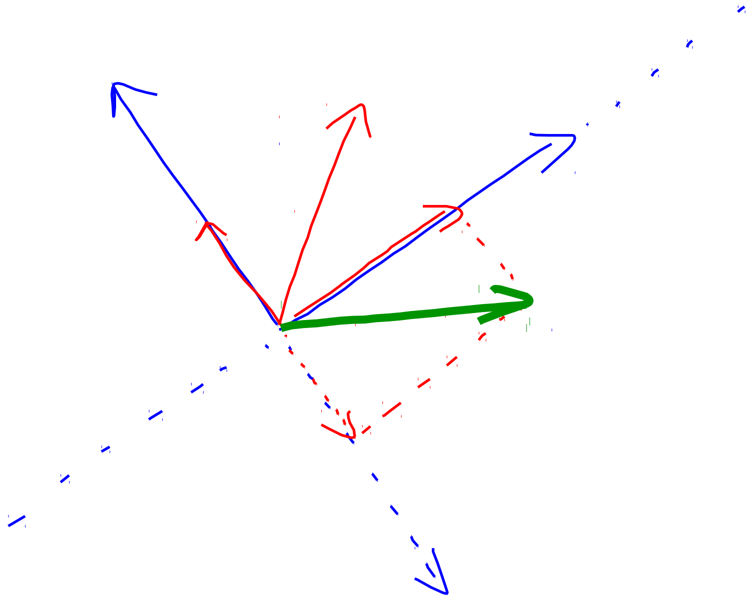
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$ má vlastní čísla 1 a -1.

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-a)(a+\lambda) - b^2 = \lambda^2 - a^2 - b^2 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$$

v_1 je vlastní vektor k 1

v_2 je vlastní vektor k -1

podle předchozího lemmatu jsou navzájem kolmé



Geometricky jde o symetrii podle přímky generované vlastním vektorem v_1 k vl. čísla 1.

16

Ortogonální operátory v $\mathbb{R}^3$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(x) = AX$

(1) Char. polynom má tvar $-\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$
má aspoň jeden kořen v $\mathbb{R}$ a ten je 1 nebo -1.

(2) $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ je-li λ_1 komplexní kořen polynomu
je i $\overline{\lambda_1}$ kořen.

$$-\lambda_1^3 + a_2\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0 = 0$$ vezmeme kompl. sdružené čísla

$$\overline{-\lambda_1^3 + a_2\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0} = \overline{0}$$

$$-\overline{\lambda_1}^3 + \overline{a_2}\,\overline{\lambda}^2 + \overline{a_1}\,\overline{\lambda_1} + \overline{a_0} = 0$$

$$-\overline{\lambda_1}^3 + a_2\overline{\lambda_1}^2 + a_1\overline{\lambda_1} + a_0 = 0$$ $\overline{\lambda_1}$ je kořen

Můžou nastat tyto dvě možnosti

1. Kořeny char. polynomu jsou

$1 \quad \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \cos\alpha - i\sin\alpha$

V tomto případě má φ dva invariantní podprostory $[v_1]$ a $[v_1]^{\perp}$, kde v_1 je vlastní vektor k 1.

V tomto případě jde geometricky o otočení kolem osy $[v_1]$ o úhel α.

2 Kořeny char. polynomu jsou

$-1 \quad \cos\alpha + i\sin\alpha \quad \cos\alpha - i\sin\alpha$

Nechť v_1 je vlastní vektor k -1. Podprostory $[v_1]$ a $[v_1]^\perp$ jsou invariantní a operátor je geometricky otočení okolo osy $[v_1]$ o úhel α se symetrií podle roviny $[v_1]^\perp$.

SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY

V, U vekt. prostory se skal. součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$\varphi: U \to V$ lineární. Adjungovaný operátor

k φ je operátor $\varphi^*: V \to U$ a platí, že

$$\forall u \in U, \forall v \in V \qquad \langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi^*(v) \rangle$$

<u>Příklad</u> $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ $\varphi(x) = Ax$ A matice $k \times n$

Hledejme $\varphi^*: \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ ve tvaru $\varphi^*(y) = By$ kde B je matice $n \times k$.

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi^*(y) \rangle$$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$$

$$(Ax)^T \overline{y} = x^T \overline{By}$$

$$x^T \underline{A^T}\, \overline{y} = x^T \underline{\overline{B}}\, \overline{y}$$

$$A^T = \overline{B}$$

$$\overline{A^T} = B$$

Je-li φ zadán maticí A, je φ^* zadán maticí $\overline{A}^T$

Nad reálnými čísly: je-li $\varphi(x) = Ax$, je $\varphi^*(y) = A^T y$.

<u>Definice</u>: Operátor $\varphi: U \to U$ se nazývá samoadjungovaný, jestliže $\varphi = \varphi^*$, tj. $\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle$ pro všechna $u, v \in U$.

Příklad: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ daný $\varphi(x) = Ax$ je samoadjungovaný, právě když $A = A^T$ (jeho matice je symetrická)

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T A y = \langle x, Ay\rangle$$

Příklad: $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\varphi(x) = Ax$ je samoadjungovaný, právě když $A = \overline{A}^T$ (takové komplexní matice se nazývají hermitovské)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & 3 \end{pmatrix}$$ je hermitovská matice

Geometrický příklad samoadj. operátoru

U vekt. prostor se skal. součinem, $V \subseteq U$ jeho podprostor

a $P: U \to U$ kolmá projekce na V.

P je samoadjungovaný operátor

$$u = \underset{\overset{\Uparrow}{V}}{Pu} + \underset{\overset{\Uparrow}{V^\perp}}{(u - Pu)}$$

$$v = \underset{\overset{\Uparrow}{V}}{Pv} + \underset{\overset{\Uparrow}{V^\perp}}{(v - Pv)}$$

$$\langle Pu, v\rangle = \langle Pu, Pv + (v - Pv)\rangle$$
$$= \langle Pu, Pv\rangle + \langle \underset{\overset{\Uparrow}{V}}{Pu}, \underset{\overset{\Uparrow}{V^\perp}}{v - Pv}\rangle$$
$$= \langle Pu, Pv\rangle$$

Analogicky spočítáme, že

$$\langle u, Pv\rangle = \langle Pu, Pv\rangle$$

Tedy kolmá projekce je samoadjungovaný operátor.

Lemma: Je-li $\varphi: U \to U$ samoadjungovaný a α je ortonormální báze v U, pak matice

$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je symetrická (je-li U nad $\mathbb{R}$)
hermitovská (je-li U nad $\mathbb{C}$)

Vlastní čísla a vlastní vektory samoadj. operátorů

(1) Vlastní čísla jsou vždy reálná (i když je U nad $\mathbb{C}$).

(2) Vlastní vektory k různým vl. číslům jsou navzájem kolmé.

Dk: (1) Nechť $\varphi(u) = \lambda u$, $u \neq \vec{0}$

$$\lambda \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\neq 0} = \langle \lambda u, u\rangle = \langle \varphi(u), u\rangle = \langle u, \varphi(u)\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \bar{\lambda} \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\neq 0}$$

Odtud $\lambda = \bar{\lambda}$, λ je reálné.

(2) $\lambda \neq \mu$ dvě vl. čísla $\quad \varphi(u) = \lambda u, \; \varphi(v) = \mu v$

$$\lambda \langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \bar{\mu}\langle u, v\rangle$$
$$= \mu \langle u, v\rangle$$

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}\langle u, v\rangle = 0$$

Proto $\langle u, v\rangle = 0$, u a v jsou navzájem kolmé.