PSEUDOINVERZNÍ MATICE

Každou matici A typu $k \times n$ lze rozložit

$$A = \underbrace{P}_{k\times k}\,\underbrace{S}_{k\times n}\,\underbrace{Q^*}_{n\times n}$$

kde $S = \left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_r & \\ \hline & 0 & & \end{array}\right)$, $s_i > 0$, a P, Q jsou unitární nebo ortogonální

Pseudoinverze k A je

$$A^{(-1)} = Q \left(\begin{array}{cccc|c} s_1^{-1} & & & & \\ & s_2^{-1} & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & s_r^{-1} & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right) P^*$$

Základní vlastnost pseudoinverse je, že $A^{(-1)}b$ je vektor s vlastností, že

$$\| A(A^{(-1)}b) - b\| = \min_{x\in\mathbb{K}^n} \|Ax-b\|$$

Když máme soustavu $Ax=b$, která nemusí mít řešení, pak $A^{(-1)}b$ je nejlepší aproximace takového řešení.

Další příklad na lin. regresi. Naměřili jsme hodnoty $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), \dots (x_n,y_n)$ a předpokládáme závislost y na x lineární tj.

$$y = \alpha + \beta x$$

Chceme najít $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby součet

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - \alpha - \beta x_i|^2$$

byl co nejmenší.

Tj. řešíme soustavě

$$y_1 = \alpha + \beta x_1$$
$$y_2 = \alpha + \beta x_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = \alpha + \beta x_n$$

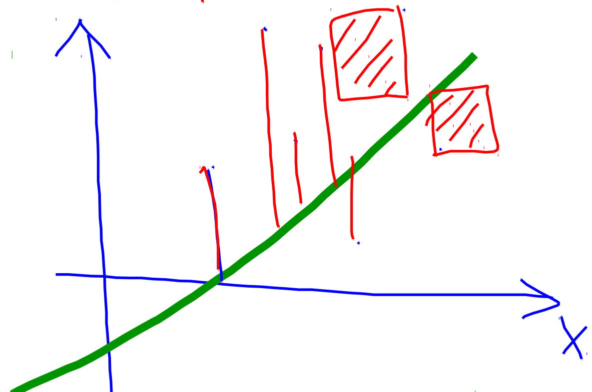
$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Soustava s maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ a neznámou $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Hledáme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tak, aby

$$\left\| A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|^2 = |\alpha + \beta x_1 - y_1|^2 + |\alpha + \beta x_2 - y_2|^2 + \dots + |\alpha + \beta x_3 - y_3|^2 + \dots$$

bylo co nejmenší.



Víme, že
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = A^{(-1)}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix}1 & \dots & 1\\ x_1 & \dots & x_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} x_i\\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^2\end{pmatrix}$$

$$\det(A^*A) = m\sum x_i^2 - \Big(\sum_i x_i\Big)\Big(\sum_j x_j\Big) = \sum_{i<j}(x_i - x_j)^2$$

x_1^2 $(m-1)$ krát
x_1x_2 -2 krát

Budeme chtít, aby $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$. Pak je $\det \neq 0$ a $A^{(-1)}$ lze spočítat takto:

$$A^{(-1)} = (A^*A)^{-1}\cdot A^* = \frac{1}{\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2}\begin{pmatrix}\sum x_i^2 & -\sum x_i\\ -\sum x_i & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ x_1 & x_2 & \dots & x_m\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{(-1)} b = \frac{1}{\sum (x_i - x_j)^2} \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sum (x_i - x_j)^2} \begin{pmatrix} \left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_j y_j\right) - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j x_j y_j\right) \\ m\left(\sum_i x_i y_i\right) - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j y_j\right) \end{pmatrix}$$

Polární rozklad matice

Motivace: Víme, že každé komplexní číslo $a+ib \in \mathbb{C}$ lze psát ve tvaru

$$a+ib = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

kde $r \geq 0$. Tento rozklad je jednoznačný, je-li $a+ib \neq 0$.

Uvažujme lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = (a+ib) z \qquad a+ib \in \mathrm{Mat}_{1\times 1}(\mathbb{C})$$

Toto zobrazení lze psát jako složení dvou zobrazení

$$\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$$

$\varphi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \varphi_1(z) = (\cos\alpha + i\sin\alpha) z$

$\varphi_2 \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad \varphi_2(z) = r z, \quad r \geq 0.$

Zahtevani $\varphi_1(z) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\, z$ je unitarni.

Je ta matrika zadošča

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)^* = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \underline{1}$$

Zahtevani $\varphi_2(z) = r \cdot z$, $r \geq 0$, je samoadjungirana in pozitivno semidefinitna.

Samoadjungiranost: $(r)^* = (\bar{r}) = (r)$

Pozitivna semidefinitnost

$$\langle rz, z \rangle = r\|z\|^2 \geq 0$$

Věta o polárním rozkladu

Je-li A čtvercová matice $n \times n$ nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$, pak ji lze rozložit na součin

$$A = R \cdot U,$$

kde R je samoadjungovaná ($R = R^*$) a pozitivně semidefinitní ($\langle Rx, x \rangle \geq 0$) a U je unitární nebo ortogonální.

Navíc platí, že $R^2 = AA^*$ (píšeme $R = \sqrt{AA^*}$).

Je-li A invertibilní, jsou matice R a U určeny jednoznačně.

Důkaz pomocí sing. rozkladu. Nechť $A = PSQ^*$ je sing. rozklad matice A.

$$A = PS\underbrace{P^* P}_{E} Q^* = \underbrace{(PSP^*)}_{R}\underbrace{(PQ^*)}_{U}$$

R je samoadjungovaná

$$R^* = (PSP^*)^* = (P^*)^* S^* P^* = PSP^* = R$$

R je pozitivně semidefinitní

$$\langle Rx, x\rangle = \langle PSP^*x, x\rangle = \langle SP^*x, P^*x\rangle = \langle Sy, y\rangle \geq 0$$

neboť

$$\langle Sy, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} s_i y_i^2 \geq 0$$

U je unitární neboli ortogonální

$$UU^* = (PQ^*)(PQ^*)^* = (PQ^*)(QP^*) = P\underbrace{Q^*Q}_{E}P^* = E$$

$$\underline{AA^*} = (RU)(U\cdot R)^* = R\underbrace{UU^*}_{E}R^* = R\cdot R = \underline{R^2}$$

Je-li A invertibilní je $S = \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n \end{pmatrix}$ $s_i > 0$

$$A = R_1 U_1 = R_2 U_2$$

$$\underbrace{AA^*}_{\text{je invertibilní}} = R_1^2, \quad AA^* = R_2^2$$

R_1 i R_2 jsou invertibilní. Vlastní čísla a vlastní vektory matice AA^* jsou $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_n^2$ a vl. vektory $u_1, \ldots u_n$ kvůli ...
Tedy R_1 i R_2 mají vlastní čísla $s_1, \ldots s_n$ a vl. vektory $u_1, \ldots u_n$.
Tedy R_1 i R_2 musí být stejné a invertibilní. Pak

$$U_1 = R_1^{-1} A = R_2^{-1} A = U_2 .$$

<u>Příklad</u>: Najděte polární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A není regulární. Najdeme první sing. rozklad matice A a z něho polární rozklad

$$A = PSQ^* = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^*$$

$$A = (PSP^*)(PQ^*)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

– existují lin. operátory, které nelze diagonalizovat. To znamená, že neexistuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} \text{ je diagonální}$$

Příklad: $\varphi(x) = Ax$ $\quad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$ $\quad \lambda = 2$ je vl. číslo alg. násobnosti 2

$(A-2E)x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vl. vektory k $\lambda = 2$ jsou násobky $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geom. násobnost je 1. Kdyby v nějaké bázi byla $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ diagonální, pak musí být $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ale pak by $\alpha = (u_1, u_2)$ byla tvořena lin. nezávislými vlastními vektory!

Cílem je najít pro každý operátor bázi α takovou, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha}$$

má co nejjednodušší tvar. (To bude Jordanův kanonický tvar)

Jordanova buňka pro vlastní číslo λ_0 je matice tvaru $k \times k$

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \lambda_0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix} \qquad \det\left(J_k(\lambda_0) - \lambda E\right) = (\lambda_0 - \lambda)^k$$

Čtvercová matice J je v Jordanově kanonickém tvaru, je-li blokově diagonální s Jordanovými buňkami na diagonále.

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{k_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

S Jordanovými buňkami souvisí pojem řetízce operátoru φ pro vlastní číslo λ_0.

Nechť $\varphi : U \longrightarrow U$ a nechť $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou nenulové vektory v U pro které platí

$$
\begin{aligned}
\varphi(u_1) - \lambda_0 u_1 &= \vec{0} \\
\varphi(u_2) - \lambda_0 u_2 &= u_1 \\
\varphi(u_3) - \lambda_0 u_3 &= u_2 \\
&\vdots \\
\varphi(u_k) - \lambda_0 u_k &= u_{k-1}
\end{aligned}
$$

Schématicky

$$\vec{0} \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_2 \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_3 \longleftarrow \cdots \longleftarrow u_{k-1} \xleftarrow{\varphi-\lambda_0 id} u_k$$

Takovéto posloupnosti nenulových vektorů říkáme řetízec operátoru φ pro vlastní číslo λ_0 délky k

(u_1 je vlastní vektor pro λ_0)

Lemma Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. nezávislé.

Důkaz indukcí podle k.

$k=1$, pak $u_1 \neq \vec{0}$, tedy u_1 je lin. nezávislý.

Nechť tvrzení platí pro $k \geq 1$. Mějme vektory délky $k+1$

$u_1, u_2, \dots u_{k+1}$. Nechť

(1) $$a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} = \vec{0}$$

Aplikujme na ni $\varphi - \lambda_0 \mathrm{id}$. Dostaneme

$$a_1 \underbrace{(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id}) u_1}_{\vec{0}} + a_2 \underbrace{(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id}) u_2}_{u_1} + \dots + a_{k+1} \underbrace{(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id}) u_{k+1}}_{u_k} = \vec{0}$$

$$a_2 u_1 + a_3 u_2 + \dots + a_{k+1} u_k = \vec{0}$$

Podle ind. předpokladu jsou $u_1, u_2, \dots u_k$ lin. nezávislé, proto

$$a_2 = a_3 = \dots = a_{k+1} = 0.$$

Dosazením do (1) dostaneme

$$a_1 u_1 = \vec{0} \implies a_1 = 0$$

Tedy $u_1 \dots u_{k+1}$ jsou LN.

Souvislost s Jord. buňkou

$u_1, \dots, u_k$ řetězec pro vl. číslo λ_0 operátoru φ

$V = [u_1, \dots, u_k] \subseteq U$

$\varphi(V) \subseteq V$

$$\varphi(u_1) = \lambda_0 u_1 \qquad \varphi(u_1) - \lambda_0 u_1 = 0$$

$$\varphi(u_2) = \lambda_0 u_2 + u_1 \qquad \varphi(u_2) - \lambda_0 u_2 = u_1$$

$$\vdots$$

$$\varphi(u_k) = \lambda_0 u_k + u_{k-1} \qquad \varphi(u_k) - \lambda_0 u_k = u_{k-1}$$

Vezmeme báni $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ a spočítáme

$$(\varphi/V)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{pmatrix} = J_k(\lambda_0)$$

Věta o Jordanově kanonickém tvaru

Nechť U je vekt. prostor dimenze n nad $\mathbb{K}$. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor takový, že součet algebraických násobností vlastních čísel je roven n. Potom v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Tento tvar je určen jednoznačně až na pořadí buněk.

Poznámka 1: Báze α není určena jednoznačně.

Poznámka 2: Báze α je posloupnost různých řetězců k vlastním číslům operátoru φ.

Dodatek k větě:

Je-li U vekt. prostor nad $\mathbb{C}$, má každý char. polynom operátoru $\varphi : U \to U$ n kořenů včetně násobnosti. Proto podmínka, že součet alg. násobností vlastních čísel je n, je VŽDY splněna.

Věta o Jordanově kanonickém tvaru – maticová verze

Nechť $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$, jejíž char. polynom má n kořenů včetně násobnosti. Pak A je podobná matici J v Jordanově kanonickém tvaru, tj.

$$J = P^{-1} A P \qquad A = P J P^{-1}$$

kde P je nějaká regulární matice. Matice J je určena jednoznačně až na pořadí buněk.

Obě verze Jordanovy věty jsou ekvivalentní. Dokážeme

verze pro operátor $\Rightarrow$ verze pro matici

Nechť $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$, char. polynom má n kořenů včetně násobností. Uvažujme operátor

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \qquad \varphi(x) = Ax.$$

Podle verze Jordanovy věty pro operátor, existuje v $\mathbb{K}^n$ báze $\alpha = (u_1, \dots u_n)$ taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J \text{ je matice v } \underset{\text{Jordanův kanonický tvar}}{\underset{\shortparallel}{JKT}}$$

$$J = (\varphi)_{\alpha,\alpha} = \underset{P^{-1}}{\underset{\shortparallel}{(id)_{\alpha,\varepsilon}}} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} \underset{P}{\underset{\shortparallel}{(id)_{\varepsilon,\alpha}}} = P^{-1} A P$$

Tím jsme dokázali maticovou verzi.