Vzájemná poloha afinních podprostorů

V vekt. prostor, M a N afinní podprostory.

Zjišťujeme:

1) Je $M \cap N = \emptyset$?

2) Je $Z(M) \subseteq Z(N)$ nebo $Z(N) \subseteq Z(M)$?

Podle odpovědí rozlišujeme 4 vzájemné polohy

I $M \subseteq N$ nebo $N \subseteq M$

V tomto případě $M \cap N \neq \emptyset$ a $Z(M) \subseteq Z(N)$ nebo obráceně.

II M a N jsou rovnoběžné

Nyní $M \cap N = \emptyset$ a $Z(M) \subseteq Z(N)$ nebo obráceně.

III $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ různoběžné

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset \quad \text{a} \quad Z(\mathcal{M}) \not\subseteq Z(\mathcal{N}) \text{ ani } Z(\mathcal{N}) \not\subseteq Z(\mathcal{M}).$$

IV $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ mimoběžné

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset \quad \text{a} \quad Z(\mathcal{M}) \not\subseteq Z(\mathcal{N}) \text{ ani } Z(\mathcal{N}) \not\subseteq Z(\mathcal{M})$$

<u>Příklad</u> dvou rovin v $\mathbb{R}^4$, které jsou mimoběžné.

$$\rho = (0,0,0,0) + s(1,0,0,0) + t(0,1,0,0) = (s,t,0,0)$$

$$\pi = (0,0,0,1) + a(0,1,0,0) + b(0,0,1,0) = (0,a,b,1)$$

$$\rho \cap \pi = \emptyset$$

$$Z(\rho) \cap Z(\pi) = [e_1, e_2] \cap [e_2, e_3] = [e_2]$$

$$Z(\rho) \not\subseteq Z(\pi), \quad Z(\pi) \not\subseteq Z(\rho)$$

<u>Typická úloha</u>: Sestrojte afinní podprostor daných vlastností.

(1) V $\mathbb{R}^3$ dán bod A a mimoběžky k a l. Sestrojte přímku p tak, že

- $A \in p$
- $k \cap p \neq \emptyset$
- $l \cap p \neq \emptyset$

<u>Řešení</u>: Vezmeme rovinu $\alpha = A \sqcup l$, p musí ležet v α. $p \cap k \subseteq \alpha \cap k$. Spočítáme tedy $\alpha \cap k$. To bude bod B a hledaná přímka p bude $\overleftrightarrow{AB}$.

(2) V $\mathbb{R}^4$ je dán bod A, rovina ρ a přímka l. ρ a l jsou mimoběžné. Najděte přímku p takovou, že

- $A \in p$
- $p \cap \rho \neq \emptyset$
- $p \cap l \neq \emptyset$

④

Řešení: Vezmeme rovinu $\alpha = A \sqcup l$, $p \leq \alpha$ tedy $p \cap \rho \leq \alpha \cap \rho$. Spočítáme $\alpha \cap \rho$. Jestliže je průnikem bod B, tak $p = \overleftrightarrow{AB}$.

Afinní zobrazení: Nechť $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou vekt. prostory. Ty můžeme chápat i jako afinní podprostory sama sebe. Zobrazení $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ nazveme afinní, jestliže je tvaru

$$\Phi(u) = A + \varphi(u)$$

kde $u \in \mathcal{U}$, A je bod ve $\mathcal{V}$ a $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární.

Příklad: $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^k$ všechna lin. zobrazení mezi $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^k$ jsou tvaru

$$\varphi(u) = C \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

C je matice $k \times n$.

5

Afinní zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ budou vypadat takto:

$$\phi(u) = C \cdot u + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix}$$

Na základní škole

$$f(x) = c\,x + d$$

bylo afinní zobrazení.

Bilineární a kvadratické formy

Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$. Lineární forma na U je lineární zobrazení $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{K}$.

Typická lineární forma na $\mathbb{R}^n$ je

$$\varphi(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = (a_1\ a_2 \dots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bilineární zobrazení $f : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ je zobrazení, které má tyto vlastnosti:

(1) $f(au+bv, w) = af(u,w) + bf(v,w)$

(2) $f(u, av+bw) = af(u,v) + bf(u,w)$

Příklad: $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$$
$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)x_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)x_2 \quad \text{lineární v } x$$
$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2)y_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)y_2 \quad \text{lineární v } y$$

2 **Příklad:** $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

Další příklady $U = \mathbb{R}_n[x]$

3 $f : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(p,q) = p(1)\cdot q'(2)$$

4 $V = C[a,b]$ $\quad F : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Každá čtvercová matice A (typu $n \times n$) určuje bilineární formu

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \right)} y_j = \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T A y$$

kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

9

Matice bilineární formy $f: U \times U \to \mathbb{K}$ v bázi α prostoru U

$\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ matice bilineární formy f v bázi α je

$A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = f(u_i, u_j)$

Těmito hodnotami je bilin. forma určena jednoznačně.

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \quad v = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$$

$$f(u,v) = f\left(\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(u_i, \sum_j y_j u_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(u_i, u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i f(u_i, u_j) y_j = \sum x_i a_{ij} y_j$$

$$= (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix} = x^T A y$$

$$= (u)_\alpha^T A (v)_\alpha$$

10

Matici f v bázi α NEZNAČÍME $(f)_{\alpha,\alpha}$!

Ukázali jsme si, že pro matici bilin. formy v bázi α platí

$$\boxed{f(u,v) = (u)_\alpha^T \; A \; (v)_\alpha}$$

Matice bilineární formy v různých bázích.

Vekt. prostor U s bázemi $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

matice bilin. formy $f: U \times U \to \mathbb{K}$

v bázi α je A

v bázi β je B

$u, v \in U$ $\quad (u)_\alpha = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (v)_\alpha = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Souřadnice v bázi β $\quad (u)_\beta = \overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \quad (v)_\beta = \overline{y} = \begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \vdots \\ \overline{y}_n \end{pmatrix}$

Platí

$$f(u,v) = x^T A y = \bar{x}^T B \bar{y}$$

Nechť P je matice přechodu $(id)_{\alpha\beta}$

$$x = P\bar{x}$$

$$y = P\bar{y}$$

Toto dosadíme do předchozí rovnice:

$$\bar{x}^T B \bar{y} = (P\bar{x})^T A (P\bar{y}) = \bar{x}^T (P^T A P)\bar{y}$$

Tato rovnost platí pro všechny možné souřadnice $\bar{x}$ a $\bar{y}$.

$e_i^T C e_j = c_{ij}$. Tedy z rovnosti

$$\bar{x}^T B \bar{y} = \bar{x}^T (P^T A P)\bar{y}$$

pro všechna $\bar{x}$ a $\bar{y}$ plyne

$$\boxed{B = P^T A P}$$

Tuto úvahu budeme používat častěji.

Čtvercové matice C a D, pro které platí

$$D = P^T C P$$

pro nějakou regulární matici P, nazýváme **kongruentní**.

Kongruence je relace ekvivalence:

(1) C je kongruentní s C (reflexivní) $C = E^T C E$

(2) jestli C kongruentní s D, je D kongruentní s C. (symetrická)

$$D = P^T C P \Rightarrow D P^{-1} = P^T C$$

$$(P^T)^{-1} D P^{-1} = C$$

$$(P^{-1})^T D P^{-1} = C$$

(3) tranzitivní

C kongruentní s D, D kongruentní s F, pak C je kongruentní s F

$$D = P^T C P, \quad F = Q^T D Q$$

$$F = Q^T D Q = Q^T (P^T C P) Q = (PQ)^T C (PQ)$$

Symetrická bilineární forma   Bilineární forma

$f: U \times U \to \mathbb{K}$ je symetrická, jestliže

$$f(u,v) = f(v,u)$$

Lemma: f je symetrická právě když její matice v nějaké bázi α je symetrická $(A = A^T)$.

Důkaz: f symetrická, pak $a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji}$.

Je-li A symetrická platí:

$$f(u,v) = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha$$

$$f(v,u) = (v)_\alpha^T A (u)_\alpha$$

$$\left\{(u)_\alpha^T A (v)_\alpha\right\}^T = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha = f(u,v)$$

$$\|$$

$$(v)_\alpha^T A^T \left((u)_\alpha^T\right)^T = (v)_\alpha^T A (u)_\alpha = f(v,u)$$

Naším cílem je ukázat, že každá symetrická čtvercová matice je kongruentní s diagonální maticí.

Důsledek bude následující: Pro každou symetrickou bilin. formu existuje báze α taková, že v souřadnicích této báze bude $f(u,v) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n$

kde $(u)_\alpha = (x_1, x_2 \dots x_n)^T$, $(v)_\alpha = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$.

Řádkové a sloupcové elementární operace jsou realizovány násobením matice tzv. elem. maticemi zleva nebo zprava

e ... element. řádk. operace

$$e(A) = \underbrace{e(E)}_{\text{element. matice}} \cdot A$$

Násobení 1. řádku číslem a

$$e_1(E) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Výměna 1. a 2. řádku

$$e_2(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

K 1. řádku přičteme a-násobek 2. řádku

$$e_3(E) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

Elementární sloupcové operace

$$e(A) = A \cdot \underbrace{e(E)}_{\text{element. matice}}$$

Násobení 1. sloupce číslem a

$$\bar{e}_1(E) = \begin{pmatrix} a & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Výměna 1. a 2. sloupce

$$\bar{e}_2(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

K 1. sloupci přičteme a-násobek 2. sloupce

$$\bar{e}_3(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ a & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Platí $\bar{e}_1(E) = e_1(E)^T$, $\bar{e}_2(E) = e_2(E)^T$, $\bar{e}_3(E) = e_3(E)^T$

Lemma: Nechť nějaká řádková operace je realizována násobením zleva maticí P. Pak stejná sloupcová operace je realizována násobením maticí P^T zprava.

Věta: Nechť matice B vznikne z čtvercové matice A provedením stejných řádkových a sloupcových úprav. Pak jsou A a B kongruentní.

Důkaz:
$$
\begin{aligned}
B &= P_k \cdots P_2 P_1 A P_1^T P_2^T \cdots P_k^T \\
&= \underbrace{(P_k P_{k-1} \cdots P_1)} A (P_k P_{k-1} \cdots P_1)^T \\
&= Q^T A Q
\end{aligned}
$$