Kvadratické formy nad $\mathbb{R}$

Bilin. forma $\quad f : U \times U \to \mathbb{R}$

Sym. bil. forma $\quad f(u,v) = f(v,u)$

Kvadr. forma $\quad g : U \to \mathbb{R}$

$\exists$ sym. bil. forma f $\quad g(u) = f(u,u)$

Typ. kvadr. forma $\quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

<u>Sylvestrův zákon setrvačnosti</u> Pro každou kvadr. formu $g : U \to \mathbb{R}$ existuje v U báze (polární báze) tak, že v souřadnicích této báze

$$g(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_s^2 + 0\,x_{s+1}^2 + \dots + 0\,x_n^2$$

Počet $1, -1$ a 0 nezávisí na výběru báze.

Matice bilin. formy v bázi α

$$f: U \times U \to \mathbb{R} \qquad \alpha = (u_1, \dots, u_n) \qquad \text{matice } A = (a_{ij})$$

$$a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

f má v bázi α matici A

v bázi β matici B

Pak

$$B = P^T A P, \quad \text{kde } P = (id)_{\beta,\alpha} \text{ je regulární matice.}$$

Takové matice nazýváme kongruentní.

③

Signatura kvadratické formy je trojice (s_+, s_-, s_0), kde s_+ je počet 1, s_- je počet -1 a s_0 je počet 0 v diagonálním tvaru této kvadratické formy.

Signatura symetrické matice je signatury příslušné kvadratické formy.

A symetrická matice $n \times n$ (reálná)

Zadává sym. bilin. formu $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^T A y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

příslušná kvadr. forma je

$$g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Kritérium kongruence matic

Symetrické matice A a B typu $n \times n$ jsou kongruentní, právě když mají stejnou signaturu.

Důkaz: Nechť A a B jsou kongruentní.

$$B = P^T A P$$

A je matice nějaké kvadr. formy ve stand. bázi.
B musí být matice téže kvadr. formy v nějaké jiné bázi.
Tato kvadr. forma má signaturu (s_+, s_-, s_0), která je společná pro obě matice.

Opačně: Jestliže obě matice mají stejnou signaturu, jsou obě kongruentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = D$$

A je kongruentní s D, B je kongruentní s D $\Rightarrow$ A je kongruentní s B.

Speciální kvadr. formy $g: U \to \mathbb{R}$, dim $U = n$

1. pozitivně definitní
$\forall u \in U \setminus \{\vec{o}\} \quad g(u) > 0 \iff S_- = 0, \; S_0 = 0$

2. negativně definitní
$\forall u \in U \setminus \{\vec{o}\} \quad g(u) < 0 \iff S_+ = S_0 = 0$

3. pozitivně semidefinitní
$\forall u \in U \quad g(u) \geq 0 \iff S_- = 0$

4. negativně semidefinitní
$\forall u \in U \quad g(u) \leq 0 \iff S_+ = 0$

5. indefinitní
$\exists u \in U \; g(u) > 0 \; \exists v \in U \; g(v) < 0 \iff S_+ > 0, \; S_- > 0$

Aplikace v dif. počtu

f nějaká funkce, která má 2 derivace

Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0

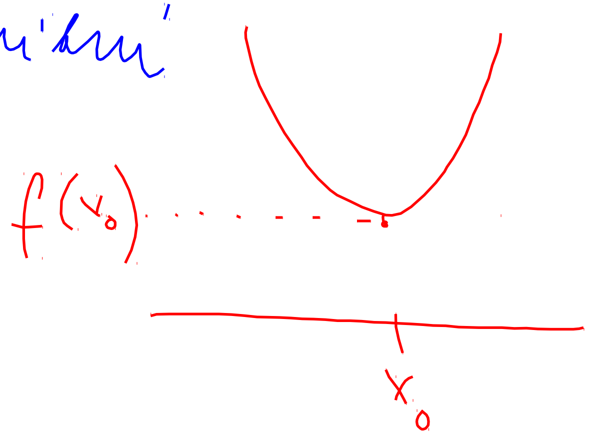
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{kvadr. forma } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ v proměnné } (x-x_0)} + \text{něco malého}$$

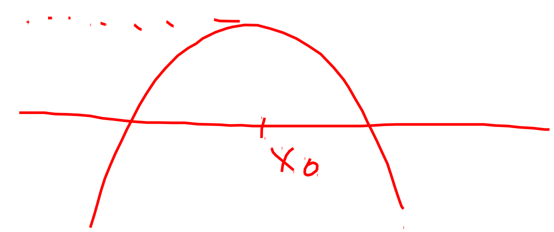
V x_0 je $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$

$$f(x) \approx f(x_0) + \text{kladné číslo} \cdot (x-x_0)^2$$

f má v x_0 minimum, jestliže je kvadr. forma v $x - x_0$ pozitivně definitní

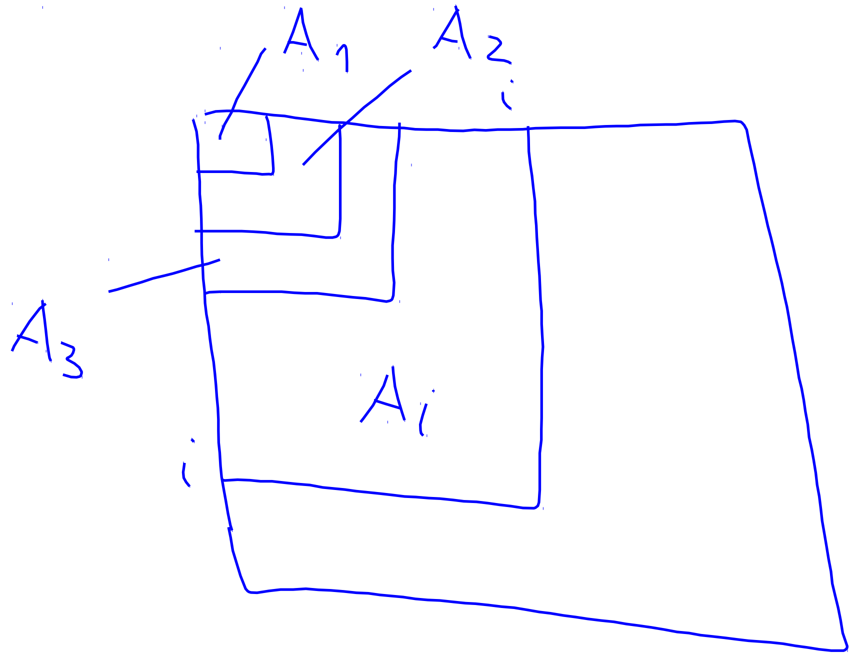
$f''(x_0) < 0$ lok. maximum





Sylvestrovo kritérium

Nechť A je čtvercová reálná matice. Její hlavní minory jsou determinanty matic A_i, kde A_i je matice vytvořená z prvních i řádků a i sloupců matice A



Hlavní minory jsou

$\det A_1 = A_1$

$\det A_2$

$\det A_3$

$\vdots$

$\det A_n = \det A$

Sylvestrovo kritérium

Kvadr. forma q s maticí A je pozitivně definitní, právě když všechny její hlavní minory jsou kladné:

$$\det A_1 > 0,\ \det A_2 > 0,\ \det A_3 > 0,\ \dots\ \det A_n > 0.$$

Kvadr. forma q s maticí A je negativně definitní, právě když

$$\det A_1 < 0,\ \det A_2 > 0,\ \det A_3 < 0,\ \dots\ (-1)^n \det A_n > 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad \det A_1 = -1,\ \det A_2 = 1,\ \det A_3 = -1,\ \dots$$

Příklad: $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$g(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = \det(3) = 3 > 0$$

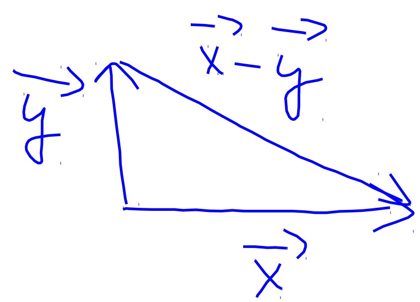
$$\det A_2 = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$$

$$\det A_3 = 21 - 4 - 7 = 10 > 0$$

Kvadr. forma je pozitivně definitní.

Prostory se skalárním součinem

Motivace: V $\mathbb{R}^2$ jsou dva vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ na sebe kolmé, jestliže pro vhodný trojúhelník je splněna Pythagorova věta



$$\|\vec{x}\|^2+\|y\|^2=\|x-y\|^2$$

$$x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2$$

$$\cancel{x_1^2}+\cancel{x_2^2}+\cancel{y_1^2}+\cancel{y_2^2}=\cancel{x_1^2}+\cancel{y_1^2}-2x_1y_1+\cancel{x_2^2}+\cancel{y_2^2}-2x_2y_2$$

$$x_1y_1+x_2y_2=0$$

Definujme $\langle\,,\,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2$

Pak pro definovaný skalární součin platí

$$\langle x, y \rangle = 0 \iff x \text{ je kolmé na } y$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

Definice reálného skalárního součinu

Nechť U je reálný vekt. prostor. Zobrazení $\langle\ ,\ \rangle : U \times U \to \mathbb{R}$ se nazývá skalární součin na U, jestliže

$$\left.\begin{array}{ll} (1)\ \forall u, v, w \in U & \langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle \\ (2)\ \forall u, v, w \in U & \langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle \end{array}\right\} \langle\ \ \rangle \text{ je bilineární}$$

(3) $\forall u, v \in U \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ symetrie

(4) $\forall u \in U \setminus \{0\} \quad \langle u, u \rangle > 0$ pozitivně definitní

Příklady

1. Standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

2. $V = \mathbb{R}^3$ $\quad \langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 7x_3y_3$

Sym. bilin. forma

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Všechny hlavní minory jsou kladné, tedy $\langle u, u \rangle > 0$ pro $u \neq \vec{o}$.

3 $U = C[a,b]$

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

je lineární v f, je lineární v g, je symetrické.

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx > 0 \text{ pro } f \neq 0.$$

Norma vektoru $u \in U$ je

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

Platí $\|u\| = 0$ právě když $u = \vec{0}$.

$$\|au\| = |a|\,\|u\|$$

$$\sqrt{\langle au,au\rangle} = \sqrt{a^2\langle u,u\rangle} = |a|\sqrt{\langle u,u\rangle}$$

Vektory u a $v \in U$ jsou na sebe kolmé (ortogonální), jestliže $\langle u, v \rangle = 0$

Značíme $u \perp v$.

Skalární součin na komplexních prostorech

Uvažujme $\mathbb{C}^2$ a definujme

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \qquad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$$

$$\langle (i,i), (i,i) \rangle = i \cdot i + i \cdot i = -1 + (-1) = -2$$

Zkusme

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} \qquad z = a + ib \quad \overline{z} = a - ib$$

$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \geq 0$$
$$= |z|^2$$

$$\langle x, x \rangle = x_1 \cdot \overline{x_1} + x_2 \cdot \overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0$$

$a \in \mathbb{C}$

$$\langle x, ay \rangle = x_1 \overline{a y_1} + x_2 \overline{a y_2} = \bar{a}\,(x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2) = \bar{a} \langle x, y \rangle$$

Definice: Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$. Zobrazení

$$\langle\ ,\ \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{C}$$

se nazývá skalární součin, jestliže

(1) $\forall u, v, w \in U,\ a, b \in \mathbb{C}$ $\quad \langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$

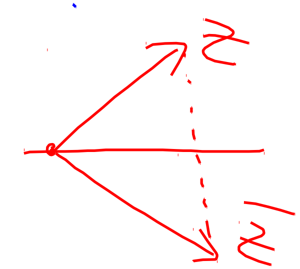
(2) $\forall u, v, w \in U,\ a, b \in \mathbb{C}$ $\quad \langle u, av + bw \rangle = \bar{a} \langle u, v \rangle + \bar{b} \langle u, w \rangle$

(3) $\forall u, v \in U$ $\quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

(4) $\forall u \in U \setminus \{0\}$ je $\langle u, u \rangle$ reálné číslo a $\langle u, u \rangle > 0$.

Poznámka: Platí $\langle u, u \rangle = \overline{\langle u, u \rangle}$ podle (3).

Odtud plyne, že $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}$



Příklady:

1. Standardní skalární součin v $\mathbb{C}^n$ je
$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}$$

2. Spojité funkce na $[a,b]$ s hodnotami v $\mathbb{C}$.
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{g}(x)\,dx$$
$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x)\,\overline{f}(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx \geq 0$$

Definice normy je stejná jako v reálném případě

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Stejné definice kolmosti dvou vektorů.

Od teď dále pracujeme se vekt. prostorem U nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem

$$\langle\ ,\ \rangle \quad U \times U \to \mathbb{K}$$

Cauchyova nerovnost: Nechť U je vekt. prostor nad $\mathbb{K}$ se skalárním součinem. Pak

$$\forall u, v \in U: \quad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Rovnost nastane, právě když u a v jsou lineárně závislé.

Příklad

1. Platí

$$\left|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n\right| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

V $\mathbb{R}^n$ vezmeme stand. skalární součin.

Rovnost nastane jedině

$$a x_i = b y_i \quad \forall i$$

2. $C[a,b] = U \qquad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Důkaz pro reálné vekt. prostory

Jestliže $v = \vec{0}$ platí rovnost $\underbrace{|\langle u, \vec{0}\rangle|}_{0} = \|u\| \underbrace{\|\vec{0}\|}_{0}$

Předpokládejme, že $v \neq \vec{0}$.

Vezmeme druhou mocninu normy $\|u - tv\|$

$$0 \le \|u - tv\|^2 = \langle u - tv, u - tv\rangle = \langle u, u\rangle - t\langle u, v\rangle - t\langle v, u\rangle + t^2\langle v, v\rangle$$

$$= \langle u, u\rangle - 2t\langle u, v\rangle + t^2\underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0} = h(t)$$

kvadratická funkce v proměnné t

Protože $h(t) \ge 0$, musí mít diskriminant $D \le 0$.

$$D = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle = 4\left(\langle u, v\rangle^2 - \|u\|^2\|v\|^2\right) \le 0$$

Proto $0 \le \langle u, v\rangle^2 \le \|u\|^2\|v\|^2$

Po odmocnění

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Rovnost nastane právě když h má nějaký reálný kořen.

To znamená, že existuje t tak, že

$$h(t) = \|u - tv\|^2 = 0$$

Proto $h(t) = 0 \iff u - tv = 0 \iff u = tv$ (u, v jsou lin. závislé)