Příklad V $\mathbb{R}^4$ spočítáme vzdálenost bodu

$$A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$ od nadroviny

$$n = \{ y \in \mathbb{R}^4 ; \ a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 + e = 0 \}$$

$$\mathrm{dist}(A, n) = \| P_{Z(n)^\perp} (A - B) \|$$ kde $B \in n$.

Předp. že $d \neq 0$. Pak lze zvolit $B = (0, 0, 0, -\frac{e}{d})$

$$Z(n) : \quad a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 = 0 = \langle (a,b,c,d), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle$$

$$Z^\perp(n) = [(a, b, c, d)]$$

Spočítáme kolmou projekci vektoru $A - B$ do $Z(n)^\perp$

$$A - B = \left(x_1, x_2, x_3, x_4 + \frac{e}{d}\right)$$

$$P_{Z(n)^\perp}(A - B) = \alpha (a, b, c, d)$$

②

$$(A-B)-P_{Z(n)^\perp}(A-B) \perp (a,b,c,d)$$

$$\left\langle \left(x_1, x_2, x_3, x_4+\frac{e}{d}\right)-\alpha(a,b,c,d),\ (a,b,c,d)\right\rangle = 0$$

$$\alpha = \frac{ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$\operatorname{dist}(A,n) = \|P_{Z(n)^\perp}(A-B)\| = \|\alpha(a,b,c,d)\| =$$

$$= |\alpha|\,\|(a,b,c,d)\| = \frac{|ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e|}{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

$$= \frac{|ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

3

Výpočet odchylky dvou afinních podprostorů

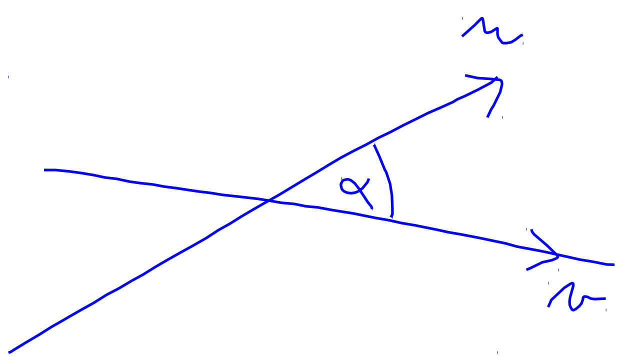
Úhel dvou nenulových vektorů je úhel α

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \in [-1, 1] \qquad \alpha \in [0, \pi]$$

Odchylka dvou přímek $[u]$, $[v]$ je úhel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

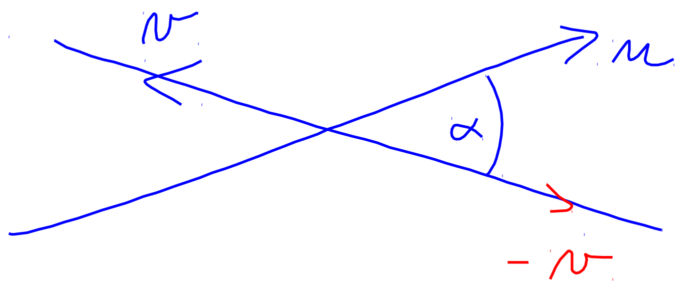
$$\cos\alpha = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$

1



$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \geq 0$$

(2)

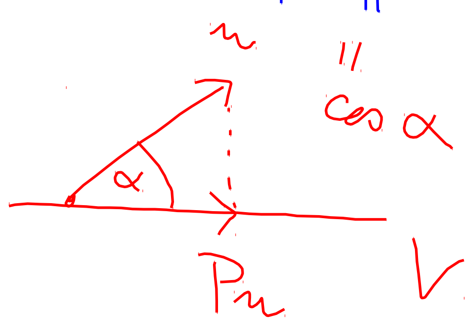


$\langle u, v\rangle < 0$

$$\cos\alpha = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\langle u, -v\rangle}{\|u\|\,\|-v\|}$$

__Věta__: Nechť U je vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ a V nějaký jeho podprostor. Nechť $u \in U$ je libovolný a Pu je kolmá projekce vektoru u do V. Potom Pu je __až na násobek__ jediný vektor z V s vlastností

$$\frac{\|Pu\|}{\|u\|} = \max_{v \in V} \frac{|\langle v, u\rangle|}{\|v\|\,\|u\|} = \text{cosinus odchylky přímek } [u] \text{ a } [v].$$



$\|$

$\cos\alpha$

Důkaz:

Cauchyova ner.

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle Pu + \overbrace{u - Pu}^{\perp}, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle Pu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \le \frac{\|Pu\|\,\|v\|}{\|u\|\,\|v\|}$$

$$= \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$ rovnost nastane právě když $v = a\,Pu$.

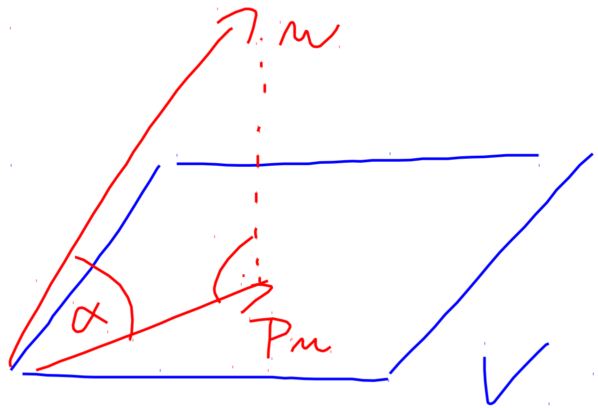
Toto vede k definici:

DEFINICE: Odchylka přímky určené nenulovým u od podprostoru V je úhel $\measuredangle([u], V) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ takový, že

$$\measuredangle([u], V) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} \measuredangle([u], [v])$$

Podle předchozí věty je

$$\cos \measuredangle([u], V) = \max_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$



Definice odchylky dvou podprostorů

(1) Nechť $V, W \subseteq U$ a nechť $V \cap W = \{0\}$.

Pak

$$\sphericalangle(V, W) = \min_{\substack{v \in V \setminus \{0\} \\ w \in W \setminus \{0\}}} \sphericalangle([v], [w])$$

(2) Jestliže $V \subseteq W$, pak

$$\sphericalangle(V, W) = 0$$

(3) Jestliže $V \cap W \neq \{0\}$, pak

$$\sphericalangle(V, W) = \sphericalangle\left(V \cap (V \cap W)^{\perp}, W \cap (V \cap W)^{\perp}\right)$$

neboli

$$V \cap (V\cap W)^{\perp} \cap W \cap (V\cap W)^{\perp} = (V\cap W)\cap (V\cap W)^{\perp} = \{0\}$$

4. Jestliže máme afinní podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$, pak jejich odchylka je

$$\measuredangle(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \measuredangle\big(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N})\big)$$

Příklad $V=\mathbb{R}^4$, $\mathcal{M} = (3,0,1,2) + [e_1+e_2, e_1+e_2+e_3]$

$$\mathcal{N} = (2,3,4,5) + [e_2+e_4, e_2+e_3+e_4]$$

$$\measuredangle(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \measuredangle\big(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N})\big)$$

$$Z(\mathcal{M})\cap Z(\mathcal{N}) = [e_3] \qquad \big(Z(\mathcal{M})\cap Z(\mathcal{N})\big)^{\perp} = [e_1, e_2, e_4]$$

$$Z(\mathcal{M}) \cap \big(Z(\mathcal{M})\cap Z(\mathcal{N})\big)^{\perp} = [e_1+e_2]$$

$$Z(\mathcal{N}) \cap \big(Z(\mathcal{M})\cap Z(\mathcal{N})\big)^{\perp} = [e_2+e_4]$$

$$\cos\sphericalangle([e_1+e_2],[e_2+e_4]) = \frac{|\langle e_1+e_2, e_2+e_4\rangle|}{\|e_1+e_2\|\,\|e_2+e_4\|} =$$

$$= \frac{|\langle e_2, e_2\rangle|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Dodatek k vekt. prostorům se skal. součinem

Minule: Každý vekt. prostor U nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skal. součinem má ortonormální bázi.

Věta: Nechť U je vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je nějaká jeho ortonormální báze. Potom

(1) souřadnice vektoru $v \in U$ v bázi α jsou

$$(v)_\alpha = \begin{pmatrix} \langle v, u_1\rangle \\ \langle v, u_2\rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n\rangle \end{pmatrix}$$

(2) Jsou-li u a v dva vektory se souřadnicemi

$$(u)_\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad (v)_\alpha = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T,$$

pak

$$\langle u, v \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

kde $\overline{y} = y$ nad $\mathbb{R}$, $\overline{y}$ se skládá z kompl. sdružených čísel nad $\mathbb{C}$.

Důkaz: (1) $v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \quad / \langle \ , u_1 \rangle$

$$\langle v, u_1 \rangle = y_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} + y_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} + \underbrace{\dots}_{0}$$

$$\langle v, u_1 \rangle = y_1$$

Analogicky

$$\langle v, u_i \rangle = y_i.$$

(10)

(2) $\langle u, v\rangle = \langle \sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle u_i, u_j \rangle$ $\quad \langle u_i, u_j\rangle = 1 \; i=j \,|\, 0 \; i\neq j$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ (z definice skal. součinu $\langle u, av\rangle = \bar{a}\langle u, v\rangle$)

Důsledek: Každý vekt. prostor U se skalárním součinem nad $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) konečné dimense je izomorfní vektorovému prostoru $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) se stand. skalárním součinem. Pro izomorfismus $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) platí, že

$$\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle u, v\rangle_U$$

<u>Důkaz</u>: Izomorfismus $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ je dán souřadnicemi v nějaké <u>ortonormální</u> bázi (může jich být spousta) $\alpha = (u_1, u_2, \ldots u_n)$

$$\varphi(u) = (u)_\alpha \qquad \text{lineární bijekce}$$

Podle (2) je

$$\langle u, v \rangle_U = \langle (u)_\alpha, (v)_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

Lineární operátor (transformace, endomorfismus) je lineární zobrazení z U do U.

Nyní se budeme zabývat pouze lin. operátory.

Invariantní podprostor lineárního operátoru $\varphi : U \to U$ je vekt. podprostor $V \subseteq U$ takový, že

$$\varphi(V) \subseteq V.$$

Příklady ① Triviální inv. podprostory jsou vždy $\{0\}$ a U.

② Symetrie podle roviny V procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$.
Netriviální inv. podprostory jsou V a $V^\perp$ = přímka kolmá k V. $v \in V$ $\varphi(v) = v$ $u \in V^\perp$ $\varphi(u) = -u$.

③ Otočení kolem počátku v $\mathbb{R}^2$ o úhel $\frac{\pi}{2}$ je lin. operátor, který má pouze triviální invariantní podprostory.

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že $V = \left[\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right]$ je invariantní.

$$\varphi(v_1) = Av_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 \in V$$

$$\varphi(v_2) = Av_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 \in V$$

$$\varphi(av_1 + bv_2) = a\underset{\underset{V}{\Uparrow}}{\varphi(v_1)} + b\underset{\underset{V}{\Uparrow}}{\varphi(v_2)} \in V.$$

14

Opakování: matice lin. zobrazení v bázích α a β.

$$\varphi : \underset{\alpha}{U} \longrightarrow \underset{\beta}{Z} \qquad \alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$$

$$(\varphi)_{\beta,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\beta \; (\varphi(u_2))_\beta \dots (\varphi(u_n))_\beta \right)$$

matice má vlastnost

$$(\varphi(u))_\beta = (\varphi)_{\beta,\alpha} \cdot (u)_\alpha$$

$$\varphi : \underset{\alpha}{U} \longrightarrow \underset{\alpha}{U} \qquad \alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha \; (\varphi(u_2))_\alpha , \dots (\varphi(u_n))_\alpha \right)$$

nestačí pro skládání zobrazení

Zpět k příkladu

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax \qquad \mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$

$$(\varphi)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \left((A\cdot e_1)_{\mathcal{E}}, (A e_2)_{\mathcal{E}}, (A e_3)_{\mathcal{E}}, (A e_4)_{\mathcal{E}} \right)$$

$$= \left(s_1 A, s_2 A, s_3 A, s_4 A \right) = A$$

Vezmeme jinou bázi $\mathcal{B} = (v_1, v_2, e_3, e_4)$. Taková báze rozšiřuje bázi (v_1, v_2) podprostoru V, který je invariantní.

$$(\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left((\varphi(v_1))_{\mathcal{B}} \; (\varphi(v_2))_{\mathcal{B}} \; (\varphi(e_3))_{\mathcal{B}} \; (\varphi(e_4))_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\varphi(v_1) = v_1 + 2v_2 = \underline{1}\, v_1 + \underline{2}\, v_2 + \underline{0} \cdot e_3 + \underline{0} \cdot e_4$

$$\varphi(v_2) = -2v_1 + v_2 = (-2)\, v_1 + 1 \cdot v_1 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + 4e_3 - e_4 = 1v_1 + 0 \cdot v_2 + 4e_3 - 1e_4$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -3v_1 + 2v_2 + 1 \cdot e_3 + 4e_4$$