Vlastní čísla a vlastní vektory

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad V = \left[\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right]$$

$$\varphi(V) \subseteq V$$

$$B = (v_1, v_2, e_3, e_4) \qquad (\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ a $V \subseteq U$ je invariantní podprostor. Nechť $v_1, \dots, v_k$ je báze V a nechť $B = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ je báze celého U. Potom

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} A & B \\ \boxed{O} & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\ k \\ \}\ n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad k & \quad n-k \end{array} & \end{array}$$

Důkaz: $v_1 \in V$ $\quad \varphi(v_1) = \underline{a_1} v_1 + \underline{a_2} v_2 + \dots + \underline{a_k} v_k + \underline{0} \cdot v_{k+1} + \dots + \underline{0} \cdot v_n$

Tato čísla dávají první sloupec matice

Analogicky pro vektory $v_2, \dots, v_k$. Proto matice O vlevo dole.

<u>Pokračování příkladu</u> $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x) = Ax$

$$V = \left[\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right] \qquad W = \left[\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{w_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right]$$

W je rovněž invariantní podprostor.

$$\varphi(w_1) = 4 w_1 - w_2$$
$$\varphi(w_2) = 1 \cdot w_1 + 4 w_2$$

$\alpha = (v_1, v_2, w_1, w_2)$ je báze $\mathbb{R}^4$. V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

→ matice $\varphi|V : V \to V$

→ matice $\varphi|W : W \to W$

Věta: Nechť $\varphi: U \to U$, V a $W \subseteq U$ jsou invariantní podprostory takové, že $U = V \oplus W$. Nechť $v_1, \dots, v_k$ je báze V a $v_{k+1}, \dots, v_n$ je báze W. Potom v bázi $\alpha = (v_1, \dots v_k, v_{k+1}, \dots v_n)$ celého prostoru U má φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} & \end{array}$$

Důkaz: $v_1 \in V \quad \varphi(v_1) \in V \Rightarrow \varphi(v_1) = \underline{a_1} v_1 + \dots + \underline{a_k} v_k + \underline{0} \cdot v_{k+1} + \dots \underline{0} v_n$

1. sloupec matice

$v_{k+1} \in W \quad \varphi(v_{k+1}) \in W \Rightarrow \varphi(v_{k+1}) = \underline{0} \cdot v_1 + \dots + \underline{0} \cdot v_k + \underline{c_1} v_{k+1} + \dots + \underline{c_{n-k}} v_n$

$(k+1)$-ní sloupec matice

jestliže $[v] \subseteq U$, kde $v \neq 0$, je invariantní pro lineární operátor $\varphi : U \to U$, pak

$$\varphi(v) = \lambda v$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{K}$. Vezmeme-li nějaký násobek $a v$ vektoru v, dostaneme

$$\varphi(av) = a\varphi(v) = a\lambda v = \lambda(av)$$

Definice Vektor $v \in U$ různý od $\vec{0}$ se nazývá vlastní vektor lineárního operátoru φ, jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že

$$\varphi(v) = \lambda v$$

λ se nazývá vlastní číslo (příslušné vlastnímu vektoru v).

Výpočet vlastních čísel

λ je vlastní číslo $\iff$ rovnice $\varphi(u) = \lambda u$ má netriviální řešení $u \neq \vec{o}$

$\iff$ rovnice $\varphi(u) - \lambda u = 0$ má netriviální řešení

$\iff$ $$(\varphi - \lambda\, id)u = 0$$ má netriviální řešení

$\iff$ v každé bázi α má rovnice $$\big((\varphi - \lambda\, id)(u)\big)_\alpha = 0$$ netriviální řešení

$\iff$ $$(\varphi - \lambda\, id)_{\alpha,\alpha} (u)_\alpha = 0$$ má netriviální řešení

$\iff$ $$\big((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda (id)_{\alpha,\alpha}\big) x = 0$$ má netriviální řešení $x \neq 0$.

$\Longleftrightarrow$ $\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) x = 0$ má netriviální řešení

$\Longleftrightarrow$ matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E$ nemá inverzní

$\Longleftrightarrow$ $\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = 0$

Spočítáme $\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) = \det(A - \lambda E)$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots \\ & & & \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda) \pm \dots\dots = (-\lambda)^n + \lambda^{n-1}(\quad) + \dots$$

Výsledkem je polynom v proměnné λ stupně n. U λ^n je koeficient $(-1)^n$.

Tento polynom se nazývá charakteristický polynom operátoru φ.

Závěr λ je vlastní číslo operátoru φ právě když je kořenem charakteristického polynomu operátoru φ. Jakmile známe vlastní čísla, najdeme příslušné vlastní vektory řešením homogenní soustavy rovnic

$$\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right) x = 0.$$

Řešení x dává souřadnice vlastního vektoru v bázi α.

Příklad $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Char. polynom: matice φ ve stand. bázi je $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(\lambda-3)+4$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

9

Kořeny jsou 2 a -1, a to jsou hledaná vl. čísla

Vl. vektor k $\lambda_1 = 2$ je

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ 4 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogenní soustava s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= t \end{aligned}$$

Vlastní vektory jsou $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pro $t \neq 0$.

Vlastní vektor k -1 je řešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 3+1 & -1 \\ 4 & -2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matice je

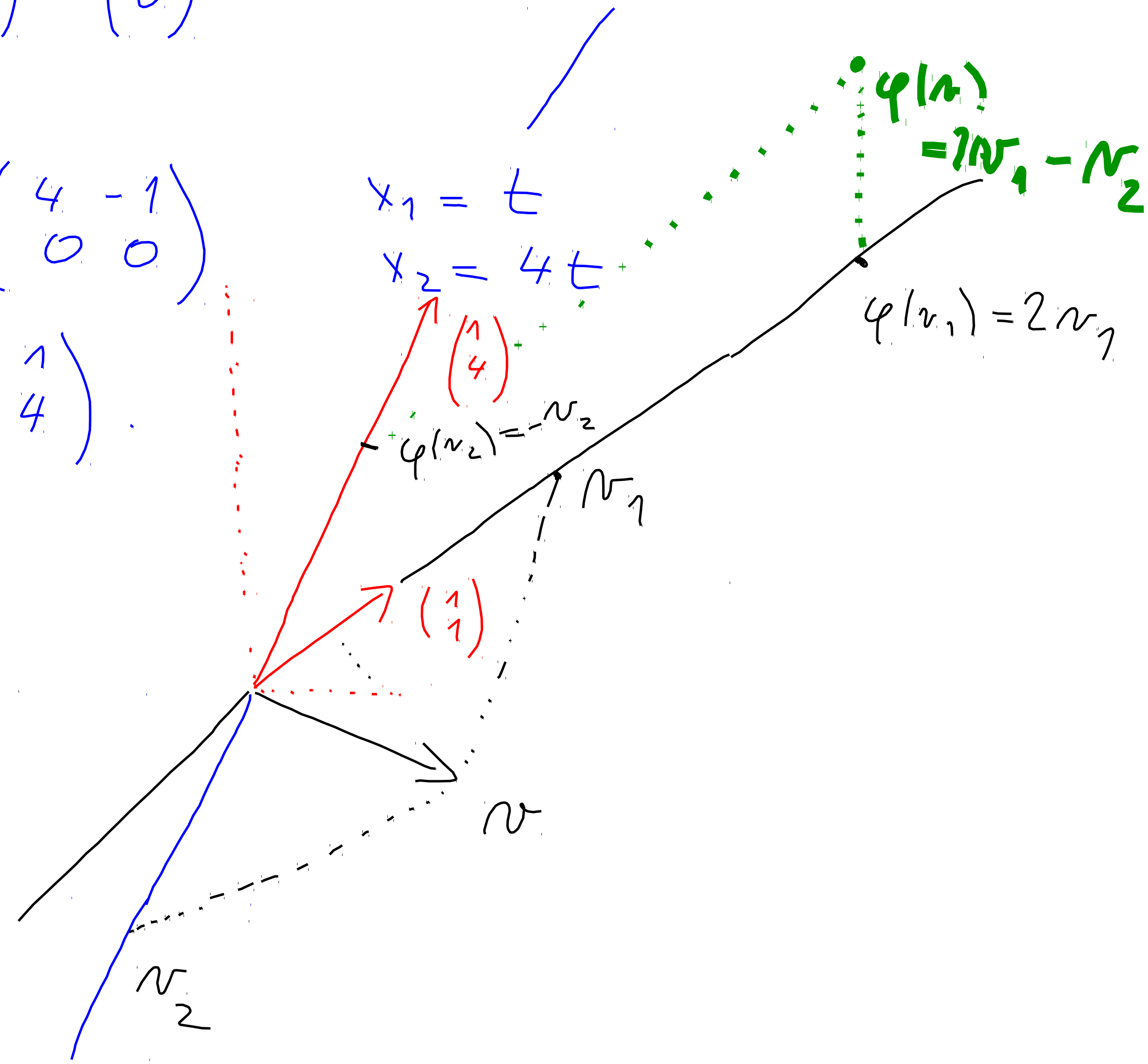
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = t$

$x_2 = 4t$

Vlastní vektory jsou $t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Geometricky:



Vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu λ operátoru φ je

$$\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\, id)$$

Tento podprostor se skládá ze všech vlastních vektorů k λ a z nulového vektoru.

Nezávislost charakteristického polynomu na volbě báze.

$\varphi : U \to U$, α, β dvě báze v U

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\beta} (\varphi)_{\beta,\beta} (id)_{\beta,\alpha} = P^{-1} (\varphi)_{\beta,\beta} P$$

Matice φ v různých bázích jsou podobné.

Ukážeme, že $\det(P^{-1} B P - \lambda E) = \det(B - \lambda E)$

$$\det(P^{-1}BP-\lambda E) = \det\left(P^{-1}(B-\lambda E)P\right) =$$
$$= \det P^{-1}\cdot\det(B-\lambda E)\cdot\det P =$$
$$= \det(\underbrace{P^{-1}\cdot P}_{E})\cdot\det(B-\lambda E) =$$
$$= \det(B-\lambda E)$$

Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy.

<u>Opakování</u> Matice A a B jsou podobné, jestliže existuje P regulární tak, že
$$A = P^{-1}BP$$
Tato relace je relací ekvivalence. Nezaměňovat s pojmem kongruence matic. A je kongruentní s B, jestliže
$$A = P^{T}BP \quad \text{pro } P \text{ regulární.}$$

Vedoucí kořenů polynomů

Polynom stupně n je

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad \text{kde } a_n \neq 0.$$

Nulový polynom má stupeň $-\infty$.

Stupeň polynomu p značíme $\deg p$. Platí

$$\deg(p \cdot q) = \deg p + \deg q$$

Kořen polynomu je $x_0 \in \mathbb{K}$ takové, že

$$p(x_0) = 0.$$

Věta: $x_0 \in \mathbb{K}$ je kořen polynomu $p \neq 0$, máme-li když

$$p(x) = (x - x_0)\, q(x),$$

kde $\deg q = \deg p - 1$.

<u>Důkaz:</u> $\Leftarrow$

jestliže $p(x) = (x - x_0)\, q(x)$, je zřejmé $p(x_0) = 0$.

$\Rightarrow$ Nechť $p(x_0) = 0$, pak lze psát

$$p(x) = p(x) - p(x_0) = a_n x^n - a_n x_0^n + a_{n-1} x^{n-1} - a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x - a_1 x_0 + a_0 - a_0$$

$$= a_n \underline{(x - x_0)} (x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1}) + a_{n-1} \underline{(x - x_0)} (x^{n-2} + \dots \quad)$$

$$\dots + a_1 \underline{(x - x_0)} = (x - x_0)\, q(x)$$

Věta: Nechť $p(x) = \pm x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ kde $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_0 \in \mathbb{Z}$ má racionální kořen. Pak je tento kořen celé číslo, které dělí a_0.

Důkaz: Nechť $x_0 = \frac{c}{d}$ je kořen, $d \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{Z}$ a c a d jsou nesoudělná.

$$0 = p(x_0) = \pm \frac{c^n}{d^n} + a_{n-1}\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}} + \dots + a_0 \quad \Big| \cdot d^n$$

$$\underbrace{0}_{\text{násobek}} = \pm \underbrace{c^n}_{\text{nesoudělné s } d} + \underbrace{a_{n-1}c^{n-1}d + \dots + a_1 c d^{n-1} + a_0 d^n}_{\text{násobek } d}$$

$$\Longrightarrow d = 1$$

Tedy platí

$$\underbrace{0}_{\text{násobek } c} = \pm \underbrace{c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_1 c}_{\text{násobek } c} + a_0$$

Tedy také a_0 je násobek c.

Příklad $\quad q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad q(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Chceme najít vl. čísla a vlastní vektory.

Char. polynom je

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Existují-li rac. kořeny, pak jsou to celá čísla, která dělí 6.

Možnosti $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

	-1	6	-11	6
2	-1	4	-3	0 = p(2)
-3	-1	9	-38	120
3	-1	3	-2	0

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 4\lambda - 3)$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(1 - \lambda)$$

Výpočet vl. vektorů

$\lambda_1 = 1$ vl. čísla

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 2 & -3 \\ 4 & 5-1 & -4 \\ 6 & 4 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = p$
$x_3 = 2p$
$x_1 = p$

Vlastní vektory k $\lambda_1 = 1$ jsou $p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Analogicky vl. vektory $\lambda_2 = 2$

jsou $t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vl. vektory k $\lambda_3 = 3$ jsou $s\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor. Nechť vl. vektory operátoru φ tvoří bázi α prostoru U. Potom

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou příslušná vlastní čísla.

V předchozím příkladu je v bázi $\alpha = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right)$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Důkaz Pro vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ báze α platí

$$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1 = \lambda_1 u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n$$

$$\varphi(u_2) = \lambda_2 u_2 = 0 \cdot u_1 + \lambda_2 u_2 + 0 \cdot u_3 + \dots + 0 \cdot u_n$$

. . . .

Proto podle definice $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$