

3. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 22. 3. 2018

Odevzdat do 5. 4. 2018

1. Uvažujme definici báze konečnědimenzionálního vektorového prostoru U nad tělesem \mathbb{K} danou těmito dvěma výroky o vektorech u_1, u_2, \dots, u_n :

$$(1) (\forall u \in U)(\exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n)(u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n).$$

$$(2) (\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n)(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0).$$

Dokažte, že (1) a (2) jsou ekvivalentní s výrokem

$$\bullet (\forall u \in U)(\exists! (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n)(u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n).$$

2. Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou takto:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pro } x \text{ iracionální,} \\ \frac{1}{n}, & \text{pro } x = \frac{m}{n} \text{ racionální, } m \text{ a } n \text{ nesoudělná, } n > 0. \end{cases}$$

Dokažte, že funkce f je nespojitá v každém racionálním čísle a .