Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Celkem	11	12

Vstupní písemka ze semináře z matematiky II, únor 2018

Max. počet bodů 40

1a. Napište definici lineární nezávislosti vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$ ve vektorovém prostoru V. (*1 bod*)

1b. Mějme lineární zobrazení $\varphi : U \to U$ a vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li vektory $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\dots$,$\varphi(u_k)$ lineárně nezávislé, jsou lineárně nezávislé i vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$. (*3 body*)

2a. Napište definici lineárního zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory. (*1 bod*)

2b. Napište, jak vypadají všechna lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$. (*3 body*)

3a. Napište definici jádra lineárního zobrazení a definici podprostoru ve vektorovém prostoru. (*2 body*)

3b. Dokažte: Jádro $\ker\varphi$ lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$ je vektorový podprostor ve V. (*2 body*)

4. Dokažte: Lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$ je prosté, právě když jeho jádro $\ker\varphi$ obsahuje pouze nulový vektor. (*4 body*)

5a. Pomocí množinového zápisu a lineárních kombinací napište definici lineárního obalu vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ ve vektorovém prostoru U. (*1 body*)

5b. Dokažte, že lineární obal vektorů $u_1, u_2, \dots, u_k$ ve vektorovém prostoru U definovaný v předchozím úkolu je roven nejmenšímu vektorovému podrostoru v U obasahujícímu všechny vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$. (*3 body*)

6a. Napište definici suprema množiny $M \subseteq \mathbb{R}$. (*2 body*)

6b. Se všemi potřebnými předpoklady zformulujte základní větu, která platí o supremu podmnožin reálných čísel. (*2 body*)

7a. Napište definici limity posloupnosti reálných čísel. (*1 bod*)

7b. Pomocí věty o supremu z předchozí úlohy dokažte: Každá rostoucí posloupnost záporných reálných čísel má limitu. (*3 body*)

8a. Napište definici limity reálné funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$. (Předpokládejte, že limita je reálné číslo.) (*1 bod*)

8b. Z definice limity dokažte:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

pokud limity vpravo existují. (*3 body*)

9a. Pomocí kvantifikátorů napište negaci definice $\lim_{x\to a} f(x) = L$. (*1 bod*)

9b. Dokažte pomocí předchozího, že limita v bodě 2 funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = 0$ pro x iracionální a $f(x) = 1$ pro x racionální, není rovna 0. (*3 body*)

10a. Napište pomocí kvantifikátorů definici spojitosti reálné funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$ bez odkazu na definici limity. (*1 bod*)

10b. Dokažte z předchozí definice: Jestliže jsou dvě funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak je v tomto bodě spojitý i jejich součin. (*3 bod*)

Pro ty, kteří už mají všechno hotovo

11. Nechť U je vektorový prostor a $\varphi : U \to U$ lineární zobrazení takové, že $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Pak prostor U lze zapsat jako direktní součet dvou podprostorů

$$U = \ker(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \ker(\varphi + \mathrm{id}).$$

Dokažte. *(4 body)*

12. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí funkce. Dokažte, že množina bodů nespojitosti této funkce je nejvýše spočetná. *(4 body)*