Algebra 1 Ukázka písemky

Jméno: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů.
K postupu k ústní zkoušce potřebujete 35 bodů
(včetně nadbytečných bodů z minipísemek). Na práci máte 2,5 hodiny (150 minut).

1. (10krát ± 1 bod — správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** V libovolné nekonečné grupě existuje prvek nekonečného řádu.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolný homomorfismus grup platí, že je injektivní, právě když má jednoprvkové jádro.

(c) **ano** — **ne** Každá konečná grupa má netriviální centrum.

(d) **ano** — **ne** Existuje nekomutativní grupa mající právě 121 prvků.

(e) **ano** — **ne** Pro libovolnou akci grupy G na množině X platí, že systém všech orbit tvoří rozklad na množině X.

(f) **ano** — **ne** Libovolný konečný obor integrity je tělesem.

(g) **ano** — **ne** Libovolný obor integrity lze vnořit do vhodného tělesa.

(h) **ano** — **ne** Charakteristika libovolného tělesa je nula.

(i) **ano** — **ne** Každý okruh s jednoznačným rozkladem je oborem integrity.

(j) **ano** — **ne** Pro libovolný okruh R platí, že množina jeho jednotek $R^{\times}$ spolu s operací násobení tvoří komutativní grupu.

2. (10 bodů) V grupě $(\mathbb{S}_5, \circ)$ jsou dány dvě permutace, $\alpha = (1,2,3,4,5)$ a $\beta = (3,4)\circ(2,5)$. Určete podgrupu $\langle \alpha, \beta \rangle$ generovanou permutacemi α a β v $(\mathbb{S}_5, \circ)$. Kolik má podgrupa $\langle \alpha, \beta \rangle$ prvků?

3. (10 bodů) Nechť $(G, \cdot)$ je součin grupy $(\mathbb{Z}_{13}^{\times}, \cdot)$ a grupy $(\mathbb{Z}_{19}^{\times}, \cdot)$, tj. $G = \mathbb{Z}_{13}^{\times} \times \mathbb{Z}_{19}^{\times}$. Popište vypsáním všech prvků alespoň jednu 2-Sylowskou podgrupu grupy G. Přitom navíc v odpovědi napište, kolik má tato 2-Sylowská podgrupa prvků a kolik 2-Sylowských podgrup grupa G má.

4. (10 bodů) O polynomu $f = x^6 + 3x^5 - 5x^3 + 3x - 1 \in \mathbb{C}[x]$ víte, že má vícenásobný kořen. Určete všechny kořeny polynomu f včetně jejich násobností.

5. (10 bodů) Rozhodněte, zda existuje homomorfismus okruhů $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}$. Pokud ano, dejte příklad alespoň jednoho takového homomorfismu, pokud ne, neexistenci homomorfismu zdůvodněte.

6. (10 bodů) Rozložte polynom $g = x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ na ireducibilní faktory nad okruhem $\mathbb{Z}_2$ zbytkových tříd modulo 2.

7. (10 bodů) Nechť $(G, \cdot)$ je grupa, ve které je každý prvek inverzní sám k sobě, tj. pro každé $a \in G$ platí $a^{-1} = a$. Dokažte, že grupa $(G, \cdot)$ je komutativní.