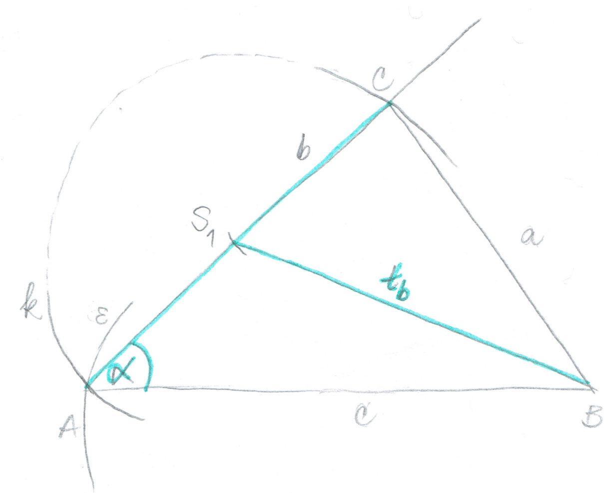
Sbírka řešených planimetrických úloh

Text vznikl za podpory Fondu rozvoje Masarykovy univerzity,
číslo projektu MUNI/FR/0926/2015.

1 Konstrukce trojúhelníků

Příklad 1.

Zadání. Je dána úsečka BS_1, $|BS_1| = 6\,\text{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který je úsečka BS_1 těžnicí t_b a pro který platí: $\alpha = 45°$, $b = 5\,\text{cm}$.

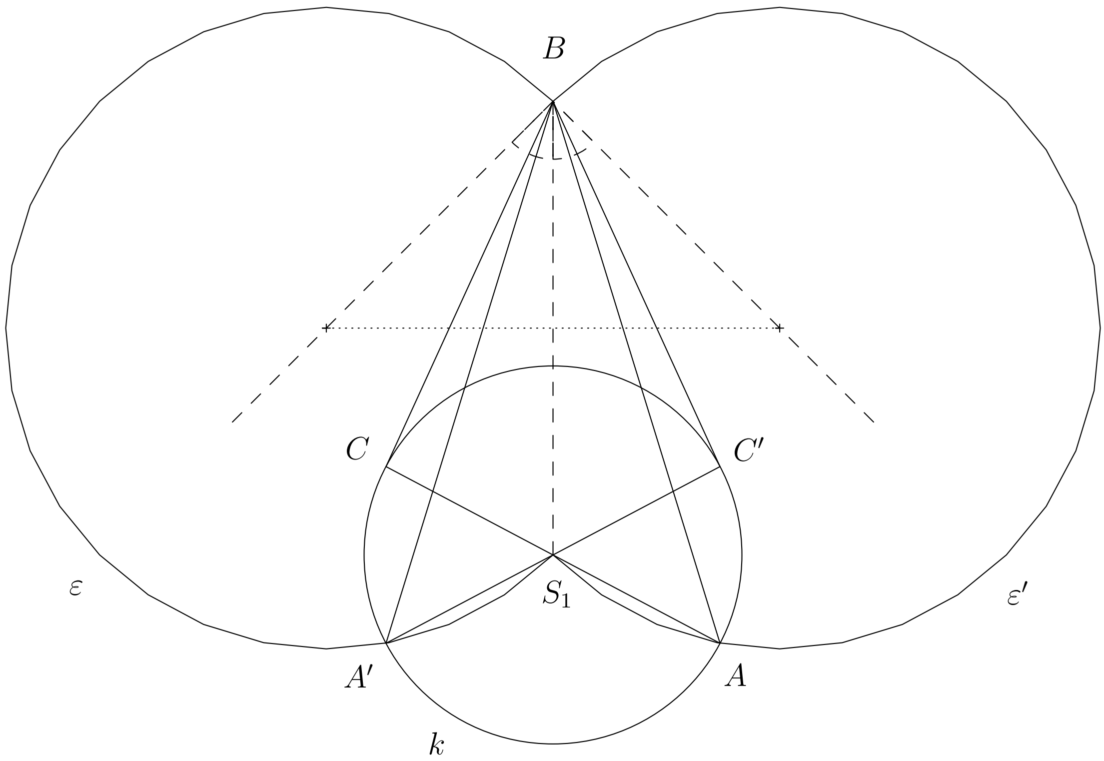


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku BS_1. Bod A leží na ekvigonále $\alpha = 45°$ nad BS_1 ve vzdálenosti $\frac{b}{2} = 2,5\,\text{cm}$ od S_1. Bod C je pak středově symetrický s bodem A podle středu S_1.

Popis konstrukce.

0. BS_1; $|BS_1| = 6\,\text{cm}$
1. ε; $\varepsilon(BS_1; \alpha = 45°)$
2. k; $k(S_1; \frac{b}{2} = 2,5\,\text{cm})$
3. A; $A \in \varepsilon \cap k$
4. C; $C \in \mapsto AS_1 \cap k$
5. $\triangle ABC$

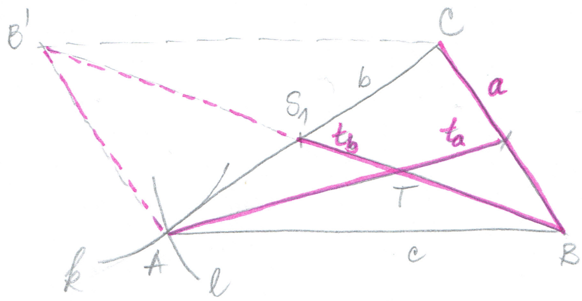
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení. Existují totiž dvě ekvigonály $\alpha = 45°$ nad BS_1.

Příklad 2.

Zadání. Je dána úsečka BS_1, $|BS_1| = 6\,\text{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který je úsečka BS_1 těžnicí t_b a pro který platí: $a = 4\,\text{cm}$, $t_a = 7\,\text{cm}$.



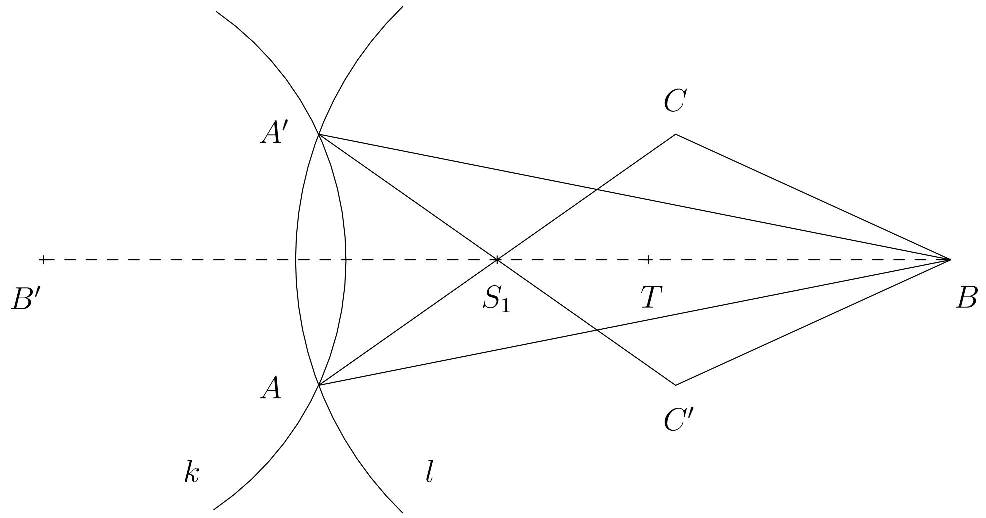
Rozbor. Nejprve umístíme úsečku BS_1. Uvažujme rovnoběžník $ABCB'$. Pak B' leží na přímce BS_1 ve vzdálenosti $2 \cdot t_b = 2 \cdot 6\,\text{cm}$ od B. Sestrojíme těžiště T trojúhelníka ABC, které dělí těžnice trojúhelníka v poměru $2:1$. Těžiště B tedy leží na úsečce BS_1 ve vzdálenosti $\frac{2}{3} \cdot t_b = \frac{2}{3} \cdot 6\,\text{cm}$ od B. Bod A se nachází ve vzdálenosti $a = 4\,\text{cm}$ od B' a ve vzdálenosti $\frac{2}{3} \cdot t_a = \frac{2}{3} \cdot 7\,\text{cm}$ od T. Bod C je pak středově symetrický s bodem A podle středu S_1.

Popis konstrukce.

0. BS_1; $|BS_1| = t_b = 6\,\text{cm}$

1. B';$B' \in \mapsto BS_1 \wedge |BB'| = 2 \cdot t_b = 2 \cdot 6\,\text{cm}$
2. T; $T \in \mapsto BS_1 \wedge |BT| = \frac{2}{3} \cdot t_b = \frac{2}{3} \cdot 6\,\text{cm}$
3. k; $k(B'; a = 4\,\text{cm})$
4. l; $l(T; \frac{2}{3} \cdot t_a = \frac{2}{3} \cdot 7\,\text{cm})$
5. A; $A \in\ k \cap l$
6. C; $C \in \mapsto AS_1\ \wedge |AS_1| = |CS_1|$
7. $\triangle ABC$

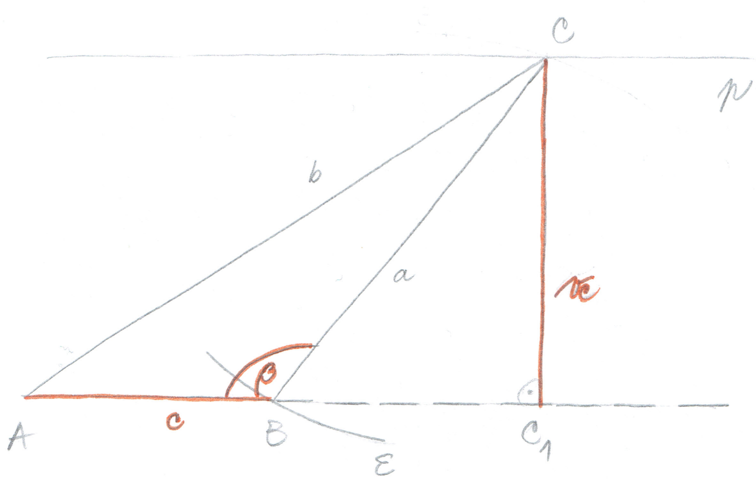
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože kružnice k protíná kružnici l ve dvou bodech.

Příklad 3.

Zadání. Je dána úsečka CC_1, $|CC_1| = 5\,\text{cm}$. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, pro který je úsečka CC_1 výškou v_c a pro který dále platí: $c = 3\,\text{cm}$, $\beta = 120°$.

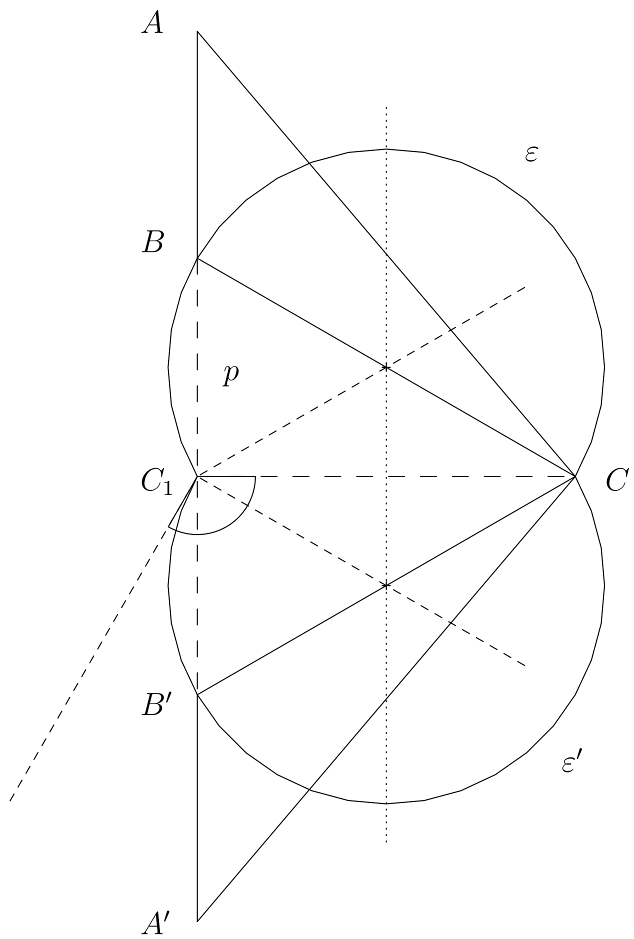


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku CC_1. K ní vedeme kolmici p procházející bodem C_1 na níž budou ležet body A a B. Bod B je bod, ze kterého vidíme úsečku CC_1 pod úhlem $\beta = 120°$. Nalezneme tedy bod B pomocí ekvigonály nad úsečkou CC_1 a bod A už je od něj vzdálen $c = 3\,\text{cm}$.

Popis konstrukce.

0. CC_1; $|CC_1| = v_c = 5\,\text{cm}$
1. p; $C_1 \in p \wedge p \perp CC_1$
2. ε; $\varepsilon(CC_1; \beta = 120°)$
3. B; $B \in p \cap \varepsilon$
4. A; $A \in\mapsto C_1B \wedge |AB| = c = 3\,\text{cm}$
5. $\triangle ABC$

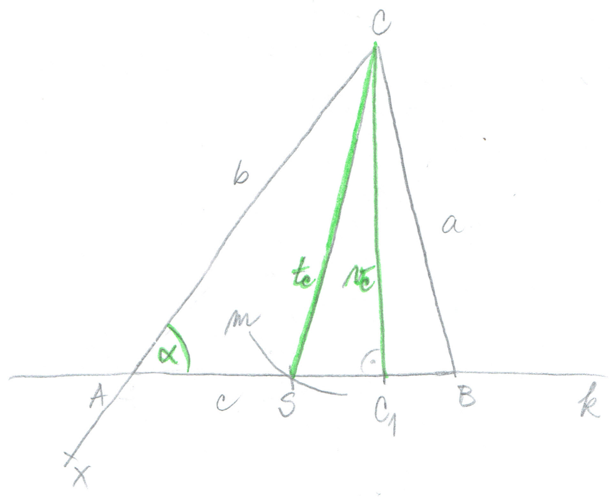
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení. Existují totiž dvě ekvigonály $\beta = 120°$ nad CC_1.

Příklad 4.

Zadání. Je dána úsečka CC_1, $|CC_1| = 5\,\mathrm{cm}$. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, pro který je úsečka CC_1 výškou v_c a pro který dále platí: $t_c = 5,5\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°$.

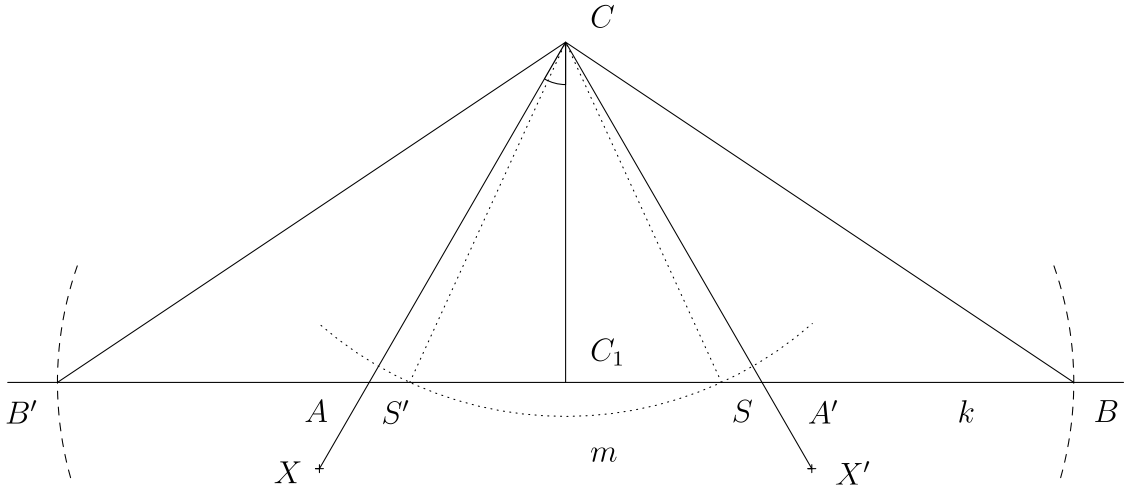


Rozbor. Umístíme úsečku CC_1 délky v_c. Následně sestrojíme přímku k procházející bodem C_1 a kolmou na úsečku CC_1. Bod S pak leží na přímce k a je od bodu C vzdálený $t_c = 5,5\,\mathrm{cm}$. Zkonstruujeme úhel C_1CX o velikosti $90° - \alpha$. Průsečíkem ramene CX s přímkou k je bod A, bod B je středově symetrický s bodem A podle středu S.

Popis konstrukce.

0. CC_1; $|CC_1| = v_c = 5\,\mathrm{cm}$
1. k; $k \in C_1 \wedge k \perp CC_1$
2. m; $m(C; t_c = 5,5\,\mathrm{cm})$
3. S; $S \in k \cap m$
4. $\sphericalangle C_1CX$; $|\sphericalangle C_1CX| = 90° - \alpha$
5. A; $A \in \mapsto CX \cap k$
6. B; $B \in k \wedge |BS| = |AS|$
7. $\triangle ABC$

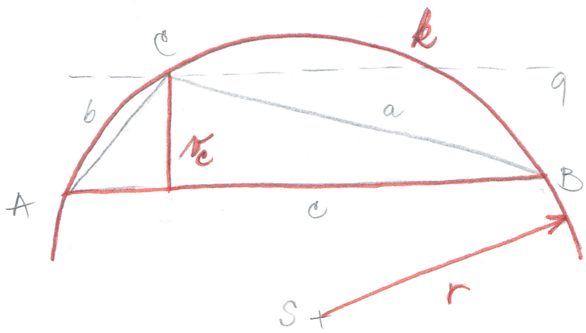
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky $S \in k \cap m$.

Příklad 5.

Zadání. Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který je úsečka AB stranou c a pro který dále platí: $v_c = 2\,\mathrm{cm}$, poloměr kružnice opsané $r = 4\,\mathrm{cm}$.

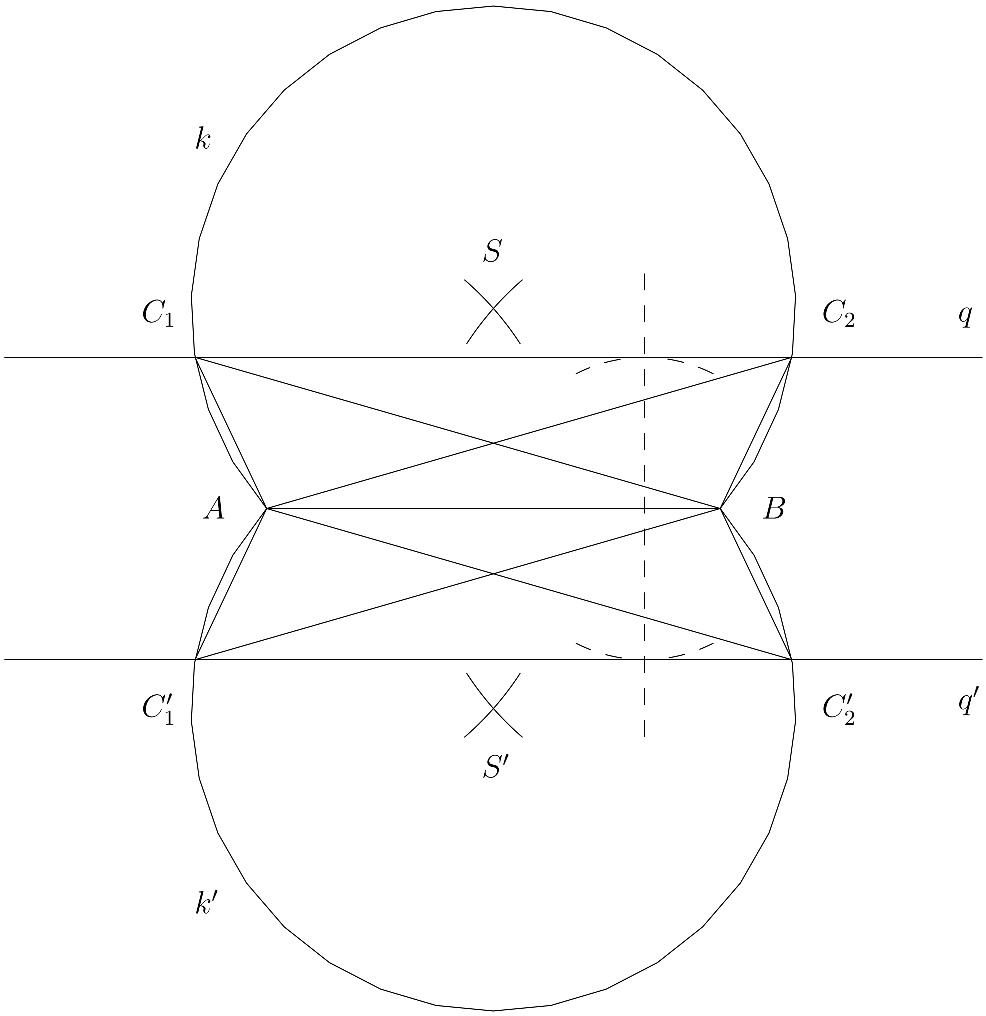


Rozbor. Nejprve sestrojíme úsečku AB o délce $c = 6\,\mathrm{cm}$. Dále nalezneme střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC. Ten je ve vzdálenosti $r = 4\,\mathrm{cm}$ od bodu A, rovněž od bodu B. Kružnici opsanou následně narýsujeme. Bod C pak leží na průniku kružnice opsané trojúhelníku ABC a ve vzdálenosti $v_c = 2\,\mathrm{cm}$ od úsečky AB.

Popis konstrukce.

0. AB; $|AB| = c = 6\,\mathrm{cm}$
1. a; $a(A; r = 4\,\mathrm{cm})$
2. b; $b(B; r = 4\,\mathrm{cm})$
3. S; $S \in a \cap b$
4. k; $k(S; r = 4\,\mathrm{cm})$
5. q; $v(AB, q) = v_c = 2\,\mathrm{cm}$
6. C; $C \in q \cap k$
7. $\triangle ABC$

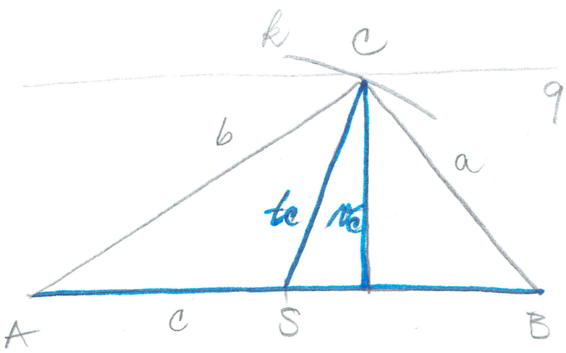
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má čtyři řešení. Existují dvě kružnice k opsané úsečce AB o daném poloměru velikosti $r = 4\,\text{cm}$, ovšem následně také dva průsečíky $C \in q \cap k$.

Příklad 6.

Zadání. Je dána úsečka AB, $|AB| = 6\,\text{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který je úsečka AB stranou c a pro který dále platí: $v_c = 3\,\text{cm}$ a $t_c = 4\,\text{cm}$.

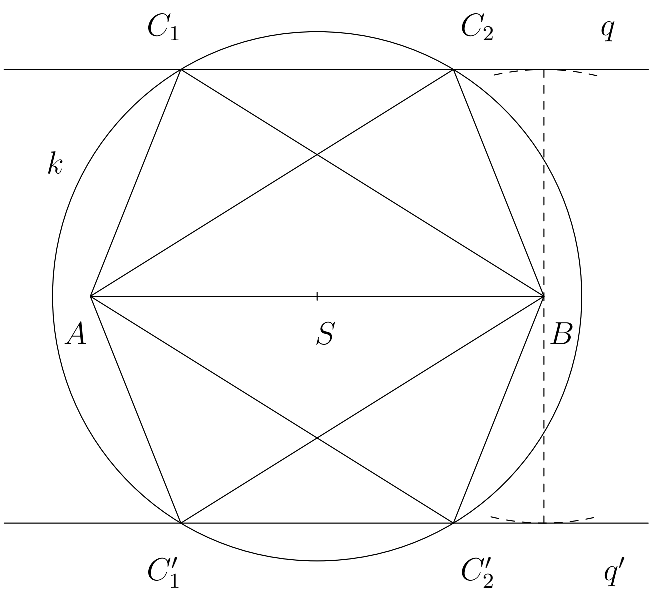


Rozbor. Nejprve sestrojíme úsečku AB o délce $c = 6\,\text{cm}$. Dále nalezneme střed S této úsečky. Bod C je od přímky AB vzdálený $v_c = 3\,\text{cm}$ a od bodu S se nachází ve vzdálenosti $t_c = 3,5\,\text{cm}$.

Popis konstrukce.

0. AB; $|AB| = c = 6\,\text{cm}$
1. S; $S \in AB \wedge |AS| = |BS|$
2. k; $k(S; t_c = 3,5\,\text{cm})$
3. q; $v(AB, q) = v_c = 3\,\text{cm}$
4. C; $C \in q \cap k$
5. $\triangle ABC$

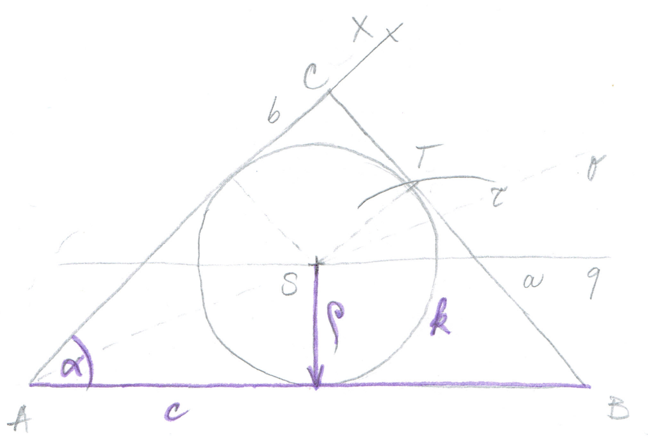
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má čtyři řešení. Existují totiž dvě přímky q s vlastností $v(AB, q) = v_c = 3\,\text{cm}$ a každá z těchto přímek má navíc dva průsečíky $C \in q \cap k$.

Příklad 7.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $c = 8\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$ a poloměr kružnice vepsané $\rho = 1,5\,\text{cm}$.

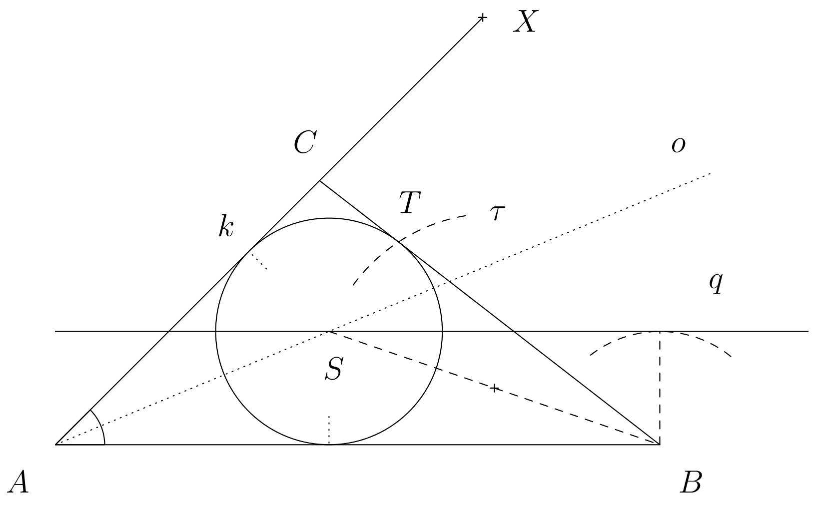


Rozbor. Nejprve sestrojíme úsečku AB o délce $c = 8\,\text{cm}$. Dále zkonstruujeme úhel BAX o velikosti $\alpha = 45^\circ$ a osu o tohoto úhlu. Střed S kružnice k opsané hledanému trojúhelníku leží na přímce o a ve vzdálenosti $\rho = 1,5\,\text{cm}$ od úsečky AB. Dále sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice bod T, jenž je tečným bodem z bodu B ke kružnici k. Bod C nyní nalezneme jako průnik polopřímek AX a BT.

Popis konstrukce.

1. AB; $|AB| = c = 8\,\text{cm}$
2. $\sphericalangle BAX$; $|\sphericalangle BAX| = \alpha = 45^\circ$
3. o; o je osa $\sphericalangle BAX$
4. q; $v(AB, q) = \rho = 1,5\,\text{cm}$
5. S; $S \in o \cap q$
6. k; $k(S; \rho = 1,5\,\text{cm})$
7. T; $T \in k \cap \tau(SB)$
8. C; $C \in \mapsto AX \cap \mapsto BT$
9. $\triangle ABC$

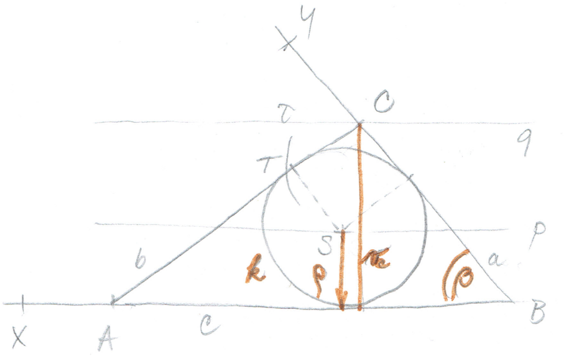
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení.

Příklad 8.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $v_c = 4\,\text{cm}$, $\beta = 60^\circ$ a poloměr kružnice vepsané $\rho = 1,5\,\text{cm}$.

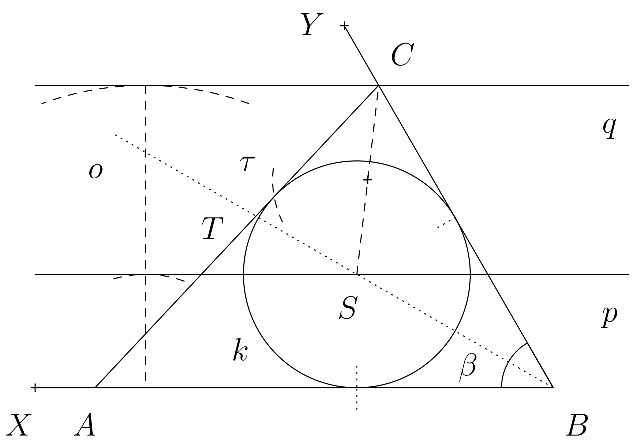


Rozbor. Nejprve umístíme polopřímku BX, následně sestrojíme úhel XBY o velikosti $\beta = 60°$. Poté narýsujeme kružnici k o poloměru $\rho = 1,5$ cm jemu vepsanou (střed kružnice k je průnikem osy o úhlu XBY s přímkou p, která se nachází ve vzdálenosti $\rho = 1,5$ cm od BX). Bod C se nachází na polopřímce BY a to ve vzdálenosti $v_c = 4$ cm od úsečky BX. Dále sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice bod T, jenž je tečným bodem z bodu C ke kružnici k. Bod B je pak průnikem polopřímek BX a CT.

Popis konstrukce.

1. $\sphericalangle XBY$; $|\sphericalangle XBY| = \beta = 60°$
2. o; o je osa $\sphericalangle XBY$
3. p; $v(XB, p) = \rho = 1,5\,\text{cm}$
4. S; $S \in o \cap p$
5. k; $k(S; \rho = 1,5\,\text{cm})$
6. q; $v(XB, q) = v_c = 4\,\text{cm}$
7. C; $C \in \mapsto BY \cap q$
8. T; $T \in k \cap \tau(SC)$
9. B; $C \in BX \cap CT$
10. $\triangle ABC$

Konstrukce.

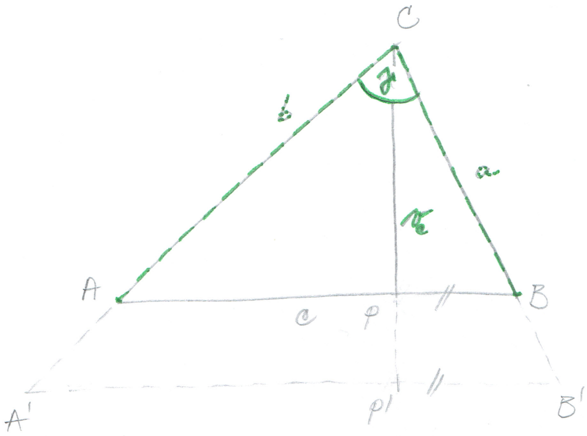


Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení.

2 Užití shodných a podobných zobrazení při konstrukci trojúhelníků

Příklad 9.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $a : b = 4 : 5$, $v_c = 3\,\text{cm}$, $\gamma = 60°$.

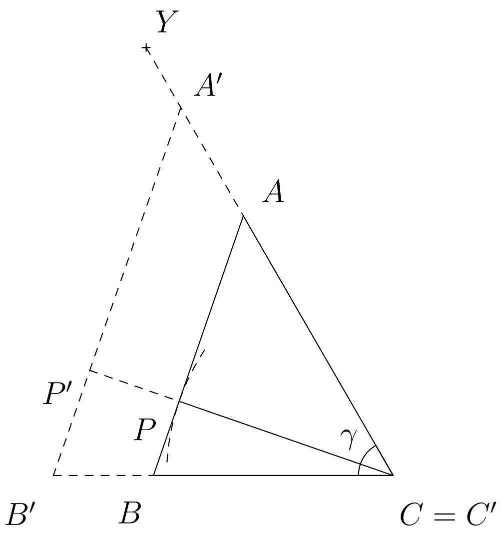


Rozbor. Nejprve umístíme libovolně dlouhou úsečku $B'C'$ a narýsujeme $\triangle A'B'C'$: Sestrojíme úhel o velikosti $\gamma = 60°$ u vrcholu C' a bod A' ležící na jeho rameni a mající od bodu C' vzdálenost rovnu $\frac{b}{a}|B'C'| = \frac{5}{4}|B'C'|$. Nechť P' je pata výšky tohoto trojúhelníka na stranu $A'B'$. Uvažujme nyní stejnolehlost $\mathcal{H}(C';\kappa)$ se středem v bodě C' a vhodným koeficientem κ tak, že se bod P' zobrazí na bod P a platí $|C'P| = v_c = 3\,\text{cm}$. V této stejnolehlosti zobrazíme celý $\triangle A'B'C'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné podle věty *sus*.

Popis konstrukce.

1. $B'C'; |B'C'| = lib.$
2. $\sphericalangle B'C'Y;\ |\sphericalangle B'C'Y| = \beta = 60°$
3. $A';\ A' \in \mapsto C'Y \wedge |A'C'| = \frac{5}{4}|B'C'|$
4. $\triangle A'B'C'$
5. $P';\ P' \in A'B' \wedge C'P' \perp A'B'$
6. $P;\ P \in \mapsto C'P' \wedge |C'P| = v_c = 3\,\text{cm}$
7. $\triangle ABC;\ \mathcal{H}(C';\kappa = \frac{|PC'|}{|P'C'|}) : \triangle A'B'C' \to \triangle ABC$

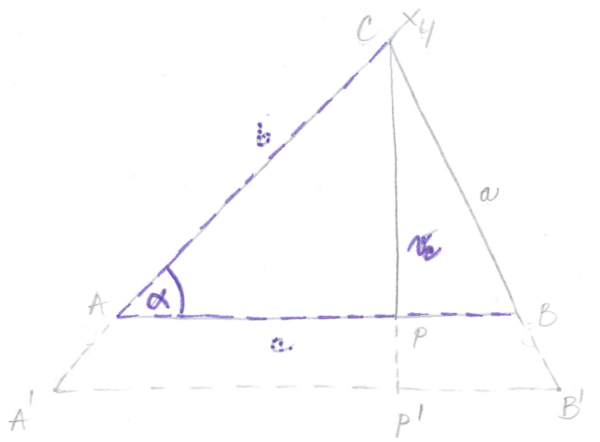
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

Příklad 10.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $b : c = 6 : 7$, $v_c = 4\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 45°$.



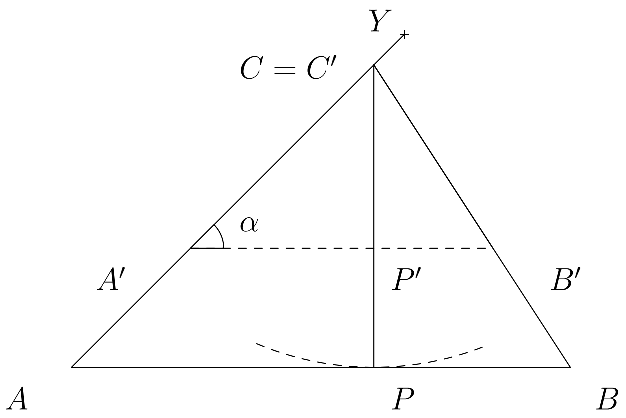
Rozbor. Nejprve umístíme libovolně dlouhou úsečku $A'B'$, následně sestrojíme úhel o velikosti $\alpha = 45°$ u vrcholu A' a bod C' tak leží na rameni tohoto úhlu a má od bodu A' vzdálenost rovnu $\frac{6}{7}|A'B'|$. Tím jsme sestrojili $\triangle A'B'C'$. Nechť P' je pata výšky tohoto trojúhelníka na stranu $A'B'$. Uvažujme nyní stejnolehlost $\mathcal{H}(C';\kappa)$ se středem v bodě C' a vhodným koeficientem κ tak, že se bod P' zobrazí na bod P a platí $|PC'| = v_c = 4\,\mathrm{cm}$. V této stejnolehlosti zobrazíme celý $\triangle A'B'C'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné podle věty *sus*.

Popis konstrukce.

1. $A'B'; |A'B'| = lib.$
2. $\sphericalangle B'A'Y;\ |\sphericalangle B'A'Y| = \alpha = 45°$
3. $C';\ C' \in \mapsto A'Y \wedge |A'C'| = \frac{6}{7}|A'B'|$
4. $\triangle A'B'C'$

5. P'; $P' \in A'B' \wedge C'P' \perp A'B'$
6. P; $P \in \mapsto C'P' \wedge |C'P| = v_c = 4\,\text{cm}$
7. $\triangle ABC$; $\mathcal{H}(C'; \kappa = \frac{|PC'|}{|P'C'|}) : \triangle A'B'C' \to \triangle ABC$

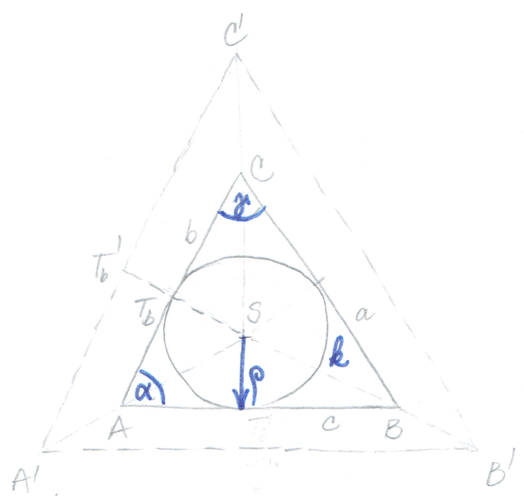
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

Příklad 11.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $\alpha = 75°$, $\gamma = 45°$ a poloměr kružnice vepsané $\rho = 2\,\text{cm}$.

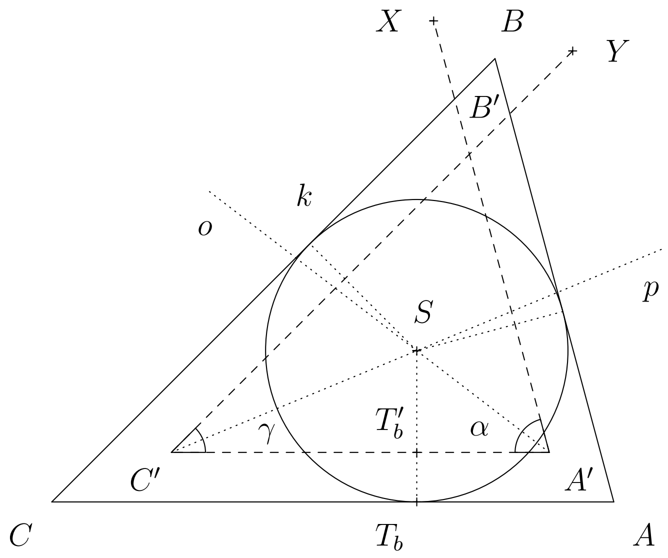


Rozbor. Nejprve umístíme libovolně dlouhou úsečku $A'C'$, následně sestrojíme úhel o velikosti $\alpha = 75°$ u vrcholu A' a úhel velikosti $\gamma = 45°$ u vrcholu C'. Bod B' nalezneme jako průsečík ramen těchto úhlů. Sestrojili jsme tak $\triangle A'B'C'$. Nechť S je střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku a bod T_b' tečný bod této kružnice se stranou $A'C'$ trojúhelníka $\triangle A'B'C'$. Uvažujme nyní stejnolehlost $\mathcal{H}(S; \kappa)$ se středem v bodě S a vhodným koeficientem κ tak, že se bod T_b' zobrazí na bod T_b vzdálený $\rho = 2\,\text{cm}$ od bodu S. V této stejnolehlosti zobrazíme celý $\triangle A'B'C'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné podle věty *uu*.

Popis konstrukce.

1. $A'C'$;$|A'C'| = lib.$
2. $\sphericalangle C'A'X$; $|\sphericalangle C'A'X| = \alpha = 75°$
3. $\sphericalangle A'C'Y$; $|\sphericalangle A'C'Y| = \gamma = 45°$
4. B'; $B' \in A'X \cap C'Y$
5. $\triangle A'B'C'$
6. o; o je osa $\sphericalangle C'A'X$
7. p; p je osa $\sphericalangle A'C'Y$
8. S; $S \in o \cap p$
9. T_b'; $T_b' \in A'C' \wedge ST_b' \perp A'C'$
10. k; $k(S; \rho = 2\,\mathrm{cm})$
11. T_b; $T_b \in \mapsto ST_b' \cap k$
12. $\triangle ABC$; $\mathcal{H}(S; \kappa = \frac{|ST_b|}{|ST_b'|}) : \triangle A'B'C' \to \triangle ABC$

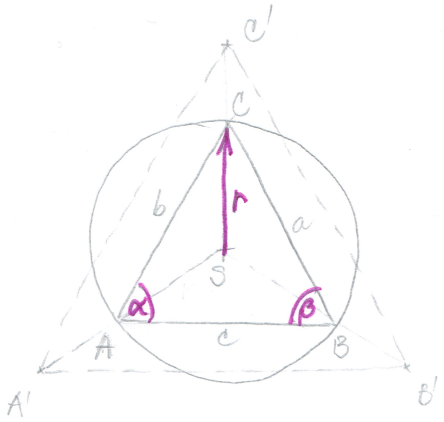
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

Příklad 12.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$ a poloměr kružnice opsané $r = 4\,\mathrm{cm}$.

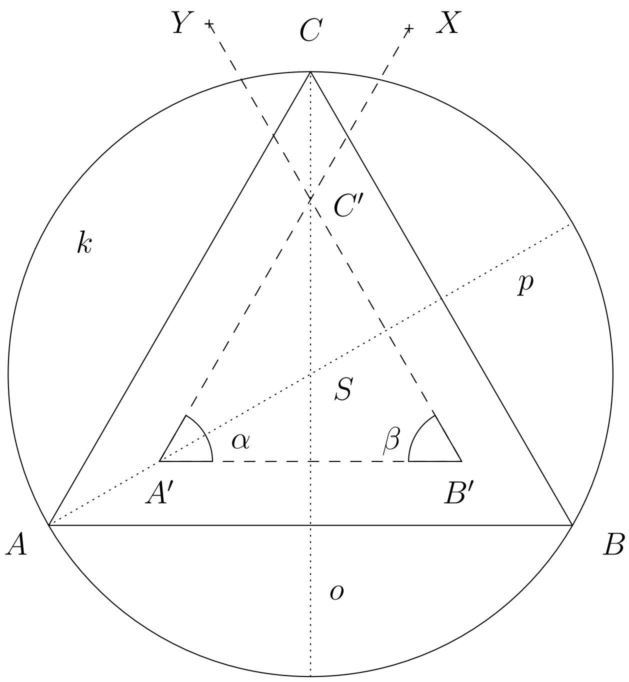


Rozbor. Nejprve umístíme libovolně dlouhou úsečku $A'B'$, následně sestrojíme úhel u vrcholu A' velikosti $\alpha = 60°$ a úhel u vrcholu B' velikosti $\beta = 60°$. Bod C' nalezneme jako průsečík ramen těchto úhlů. Sestrojili jsme tak $\triangle A'B'C'$. Nechť S je střed kružnice k' opsané tomuto trojúhelníku. Uvažujme nyní stejnolehlost $\mathcal{H}(S;\kappa)$ se středem v bodě S a vhodným koeficientem κ tak, že se bod A' zobrazí na bod A a platí $|SA| = r = 4\,\mathrm{cm}$. V této stejnolehlosti zobrazíme celý $\triangle A'B'C'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné podle věty *uu*.

Popis konstrukce.

1. $A'B'$;$|A'B'| = lib.$
2. $\sphericalangle B'A'X$; $|\sphericalangle B'A'X| = \alpha = 60°$
3. $\sphericalangle A'B'Y$; $|\sphericalangle A'B'Y| = \beta = 60°$
4. C'; $C' \in A'X \cap B'Y$
5. $\triangle A'B'C'$
6. o; o je osa úsečky AB
7. p; p je osa úsečky BC
8. S; $S \in o \cap p$
9. k; $k(S; r = 4\,\mathrm{cm})$
10. A; $A \in \mapsto SA' \cap k$
11. $\triangle ABC$; $\mathcal{H}(S'; \kappa = \frac{|SA|}{|SA'|}) : \triangle A'B'C' \to \triangle ABC$

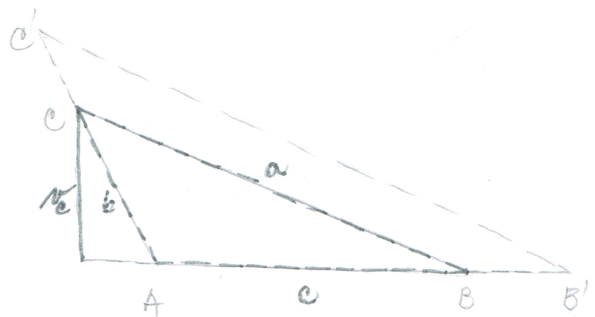
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

Příklad 13.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $a : b : c = 7 : 3 : 5$, $v_c = 4\,\text{cm}$.



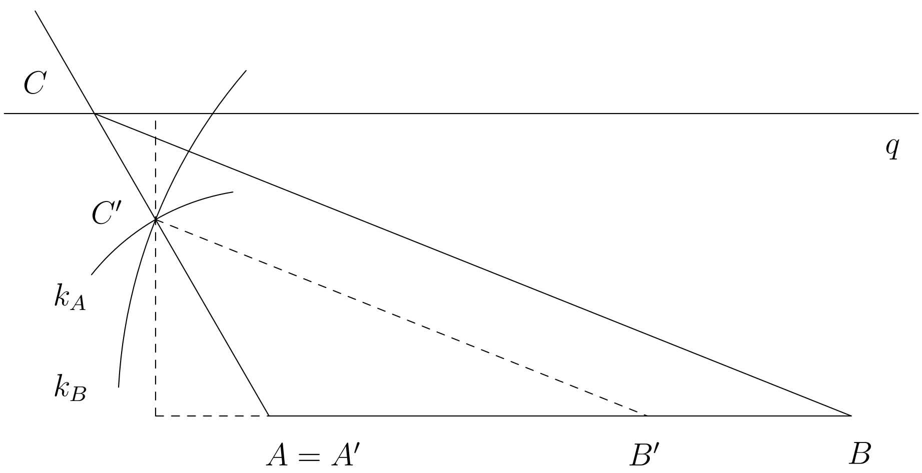
Rozbor. Nejprve umístíme libovolně dlouhou úsečku $A'B'$. Bod C' se nachází ve vzdálenosti $\frac{b}{c}|A'B'| = \frac{3}{5}|A'B'|$ od bodu A' a ve vzdálenosti $\frac{a}{c}|A'B'| = \frac{7}{5}|A'B'|$ od bodu B'. Sestrojíme tak $\triangle A'B'C'$. Uvažujme stejnolehlost $\mathcal{H}(A'; \kappa)$ se středem v bodě A' a vhodným koeficientem κ tak, že se bod C' zobrazí na bod C a jeho vzdálenost od přímky $A'B'$ bude $v_c = 4\,\text{cm}$. V této stejnolehlosti zobrazíme celý $\triangle A'B'C'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné podle věty *sss*.

Popis konstrukce.

1. $A'B'; |A'B'| = lib.$
2. k_A; $k_A(A'; \frac{b}{c}|A'B'| = \frac{3}{5}|A'B'|)$
3. k_B; $k_B(B'; \frac{a}{c}|A'B'| = \frac{7}{5}|A'B'|)$

4. C'; $C' \in k_A \cap k_B$
5. $\triangle A'B'C'$
6. q; $v(A'B', q) = v_c = 4\,\mathrm{cm}$
7. C; $C \in \mapsto A'C' \cap q$
8. $\triangle ABC$; $\mathcal{H}(S'; \kappa = \frac{|A'C|}{|A'C'|}) : \triangle A'B'C' \to \triangle ABC$

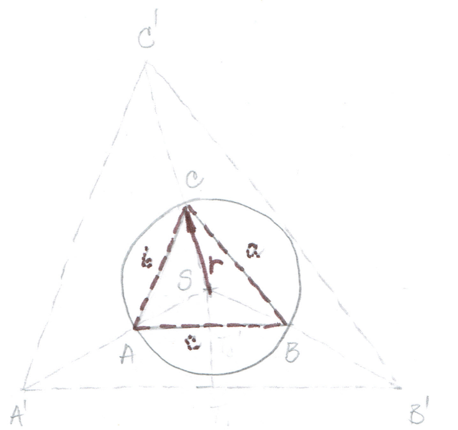
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

Příklad 14.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $a : b : c = 4 : 3 : 5$, poloměr kružnice opsané $r = 4\,\mathrm{cm}$.

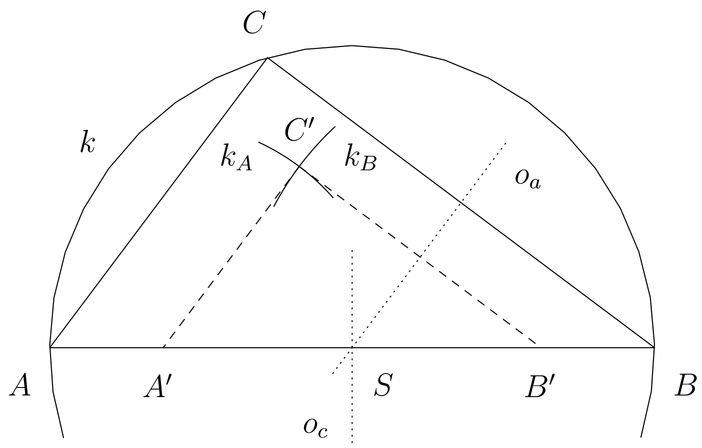


Rozbor. Nejprve umístíme libovolně dlouhou úsečku $A'B'$. Bod C' se nachází ve vzdálenosti $\frac{b}{c}|A'B'| = \frac{3}{5}|A'B'|$ od bodu A' a ve vzdálenosti $\frac{a}{c}|A'B'| = \frac{4}{5}|A'B'|$ od bodu B'. Sestrojili jsme tedy $\triangle A'B'C'$. Sestrojme střed S' kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$. Uvažujme stejnolehlost $\mathcal{H}(S; \kappa)$ se středem v bodě S a vhodným koeficientem κ tak, že se bod A' zobrazí na bod A a platí $AS = r = 4\,\mathrm{cm}$. V této stejnolehlosti zobrazíme celý $\triangle A'B'C'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné podle věty sss.

Popis konstrukce.

1. $A'B'$;$|A'B'| = lib.$
2. k_A; $k_A(A'; \frac{b}{c}|A'B'| = \frac{3}{5}|A'B'|)$
3. k_B; $k_B(B'; \frac{a}{c}|A'B'| = \frac{4}{5}|A'B'|)$
4. C'; $C' \in k_A \cap k_B$
5. $\triangle A'B'C'$
6. o_a; o_a je osa úsečky $B'C'$
7. o_c; o_c je osa úsečky $A'B'$
8. S; $S \in o_a \cap o_c$
9. k; $k(S; r = 4\,\text{cm})$
10. A; $A \in \mapsto SA' \cap k$
11. $\triangle ABC$; $\mathcal{H}(S; \kappa = \frac{|AS|}{|A'S|}) : \triangle A'B'C' \to \triangle ABC$

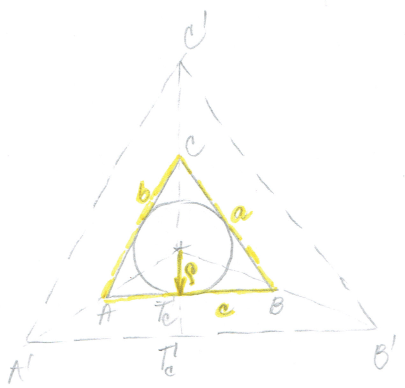
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

Příklad 15.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $a : b : c = 5 : 6 : 5$, poloměr kružnice vepsané $\rho = 2\,\text{cm}$.

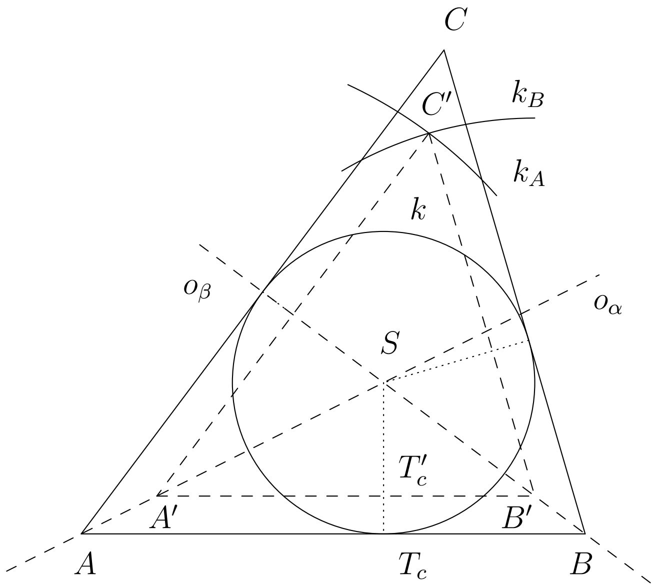


Rozbor. Nejprve umístíme libovolně dlouhou úsečku $A'B'$. Bod C' se nachází ve vzdálenosti $\frac{b}{c}|A'B'| = \frac{6}{5}|A'B'|$ od bodu A' a ve vzdálenosti $\frac{a}{c}|A'B'| = |A'B'|$ od bodu B'. Sestrojili jsme tedy $\triangle A'B'C'$. Sestrojme střed S kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$ a tečný bod T_c' této kružnice se stranou $A'B'$. Uvažujme stejnolehlost $\mathcal{H}(S;\kappa)$ se středem v bodě S a vhodným koeficientem κ tak, že se bod T_c' zobrazí na bod T_c a že platí $ST_c = r = 4\,\mathrm{cm}$. V této stejnolehlosti zobrazíme celý $\triangle A'B'C'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné podle věty sss.

Popis konstrukce.

1. $A'B'$;$|A'B'| = lib.$
2. k_A; $k_A(A'; \frac{b}{c}|A'B'| = \frac{6}{5}|A'B'|)$
3. k_B; $k_B(B'; \frac{a}{c}|A'B'| = |A'B'|)$
4. C'; $C' \in k_A \cap k_B$
5. $\triangle A'B'C'$
6. o_α; o_α je osa $\sphericalangle B'A'C'$
7. o_β; o_β je osa $\sphericalangle A'B'C'$
8. S; $S \in o_\alpha \cap o_\beta$
9. p; $S \in p \ \wedge p \perp B'C'$
10. T_c'; $T_c' \in A'B' \cap p$
11. k; $k(S; r = 4\,\mathrm{cm})$
12. T_c; $T_a \in T_c'S \cap k$
13. $\triangle ABC$; $\mathcal{H}(S'; \kappa = \frac{|T_cS|}{|T_c'S|}) : \triangle A'B'C' \to \triangle ABC$

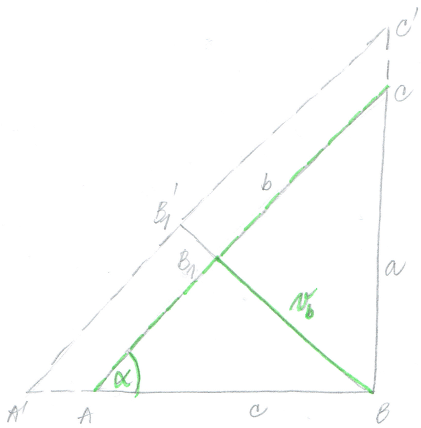
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

Příklad 16.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $\alpha = 45°$, $v_b = 4\,\mathrm{cm}$, $|AB_1| : |B_1C| = 3 : 4$, kde B_1 je pata výšky z B na AC.



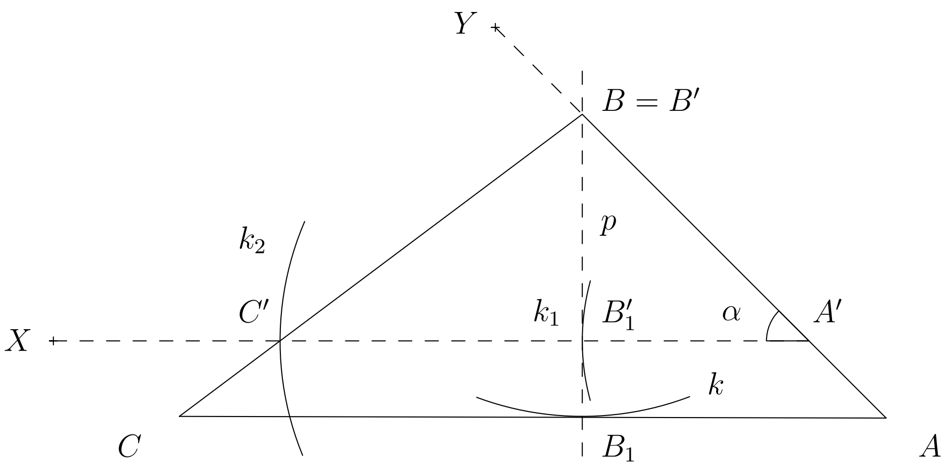
Rozbor. Nejprve umístíme přímku $A'X$. Dále na ní nalezneme body B_1' a C' libovolně tak, aby platilo $|A'B_1'| : |B_1'C'| = 3 : 4$. Bod B' leží na přímce p kolmé na úsečku $A'X$ a procházející bodem B_1', zároveň leží na rameni $A'Y$ úhlu $XA'Y$ o velikosti $\alpha = 45°$. Uvažujme tedy stejnolehlost $\mathcal{H}(B';\kappa)$ s vhodným koeficientem κ tak, že se bod B_1' zobrazí na bod B_1, přičemž musí platit, že úsečka B_1B' má velikost $v_b = 4\,\mathrm{cm}$. V této stejnolehlosti zobrazíme celý $\triangle A'B'C'$. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné podle věty uu.

Popis konstrukce.

1. $\leftrightarrow A'X$
2. k_1; $k_1(A';3)$
3. B_1'; $B_1' \in k_1 \cap \mapsto A'X$

4. k_2; $k_2(B_1'; 4)$
5. C'; $C' \in k_2 \cap \mapsto A'X$
6. p; $B_1' \in p \wedge p \perp A'X$
7. $\sphericalangle XA'Y$; $|\sphericalangle XA'Y| = \alpha = 45°$
8. B'; $B' \in p \cap A'Y$
9. k; $k(B'; v_b = 4\,\mathrm{cm})$
10. B_1; $B_1 \in p \cap k$
11. $\triangle ABC$; $\mathcal{H}(S'; \kappa = \frac{|B'B_1|}{|B'B_1'|}) : \triangle A'B'C' \to \triangle ABC$

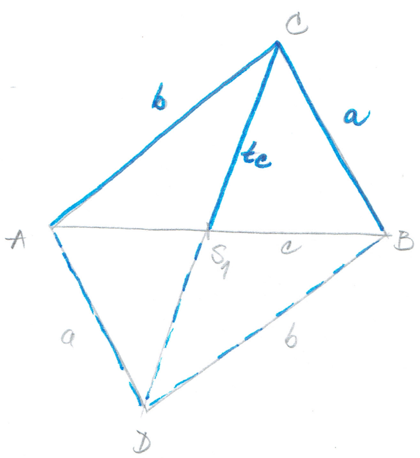
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

Příklad 17.

Zadání. Je dána úsečka CS_1, $|CS_1| = 3\,\mathrm{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který je úsečka CS_1 těžnicí t_c a pro který dále platí: $a = 3,5\,\mathrm{cm}$, $b = 5\,\mathrm{cm}$.

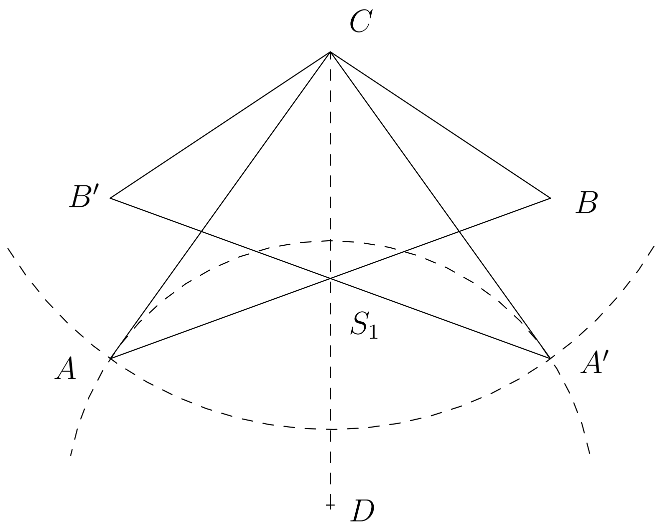


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku CS_1. Uvažujme středovou souměrnost $\mathcal{S}(S_1)$ se středem S_1, který je zároveň středem úsečky AB. Vrcholy trojúhelníka ABC a jeho obrazu tvoří vrcholy čtyřúhelníka, který pro jednoduchost označíme $BCAD$ (podle náčrtku). Prakticky tak narýsujeme trojúhelník CAD podle věty sss, přičemž $|CA| = b$, $|AD| = a$, $|CD| = 2 \cdot t_c$. Bod A pak jednoduše zobrazíme v $\mathcal{S}(S_1)$ do bodu B.

Popis konstrukce.

0. CS_1; $|CS_1| = 3\,\mathrm{cm}$
1. D; $D \in \mapsto CS_1 \wedge |CD| = 2 \cdot t_c$
2. $\triangle CAD$; $|CA| = b = 5\,\mathrm{cm}$, $|AD| = a = 3,5\,\mathrm{cm}$
3. B; $B \in \mapsto AS_1 \wedge |AB| = 2 \cdot |AS_1|$
4. $\triangle ABC$

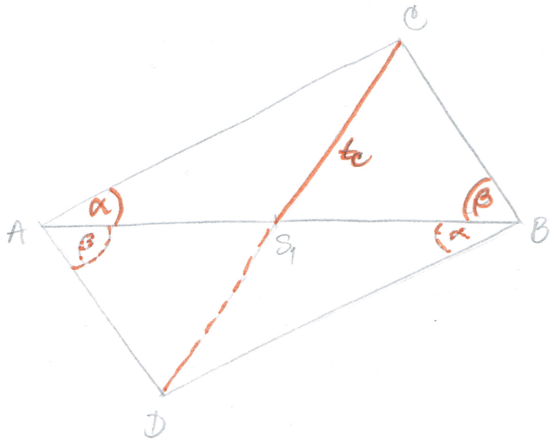
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení. Existují dva trojúhelníky $\triangle CAD$ sestrojené podle věty sss.

Příklad 18.

Zadání. Je dána úsečka CS_1, $|CS_1| = 3\,\mathrm{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který je úsečka CS_1 těžnicí t_c a pro který dále platí: $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$.

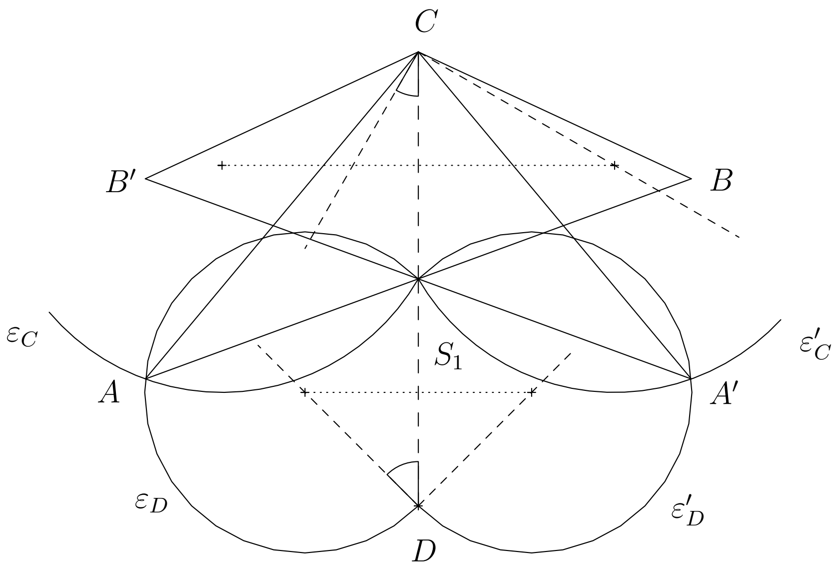


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku CS_1. Uvažujme středovou souměrnost $\mathcal{S}(S_1)$ se středem S_1, který je zároveň středem úsečky AB. Vrcholy trojúhelníka ABC a jeho obrazu tvoří vrcholy čtyřúhelníka, který pro jednoduchost označíme $BCAD$ (podle náčrtku). Prakticky tak nalezneme bod D a sestrojíme bod A, ze kterého je úsečka CS_1 vidět pod úhlem velikosti $\alpha = 30°$ a úsečka S_1D pod úhlem velikosti $\beta = 45°$. Bod A pak jednoduše zobrazíme v $\mathcal{S}(S_1)$ do bodu B.

Popis konstrukce.

0. CS_1; $|CS_1| = 3\,\text{cm}$
1. D; $D \in \mapsto CS_1 \wedge |CD| = 2 \cdot t_c$
2. ε_C; $\varepsilon_C(S_1C; \alpha = 30°)$
3. ε_D; $\varepsilon_D(S_1D; \beta = 45°)$
4. A; $A \in \varepsilon_C \cap \varepsilon_D$
5. B; $B \in \mapsto AS_1 \wedge |AB| = 2 \cdot |AS_1|$
6. $\triangle ABC$

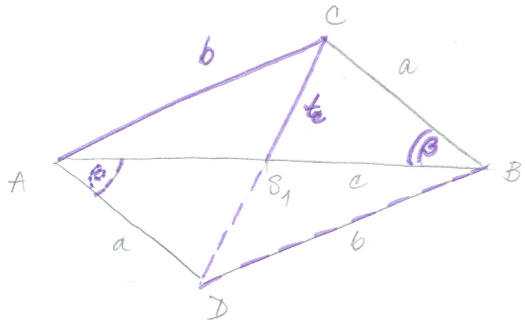
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení. Existují dvě ekvigonály ε_C a dvě ekvigonály ε_D. Dostáváme celkem dva jejich průsečíky.

Příklad 19.

Zadání. Je dána úsečka CS_1, $|CS_1| = 3\,\text{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který je úsečka CS_1 těžnicí t_c a pro který dále platí: $b = 8\,\text{cm}$, $\beta = 30°$.

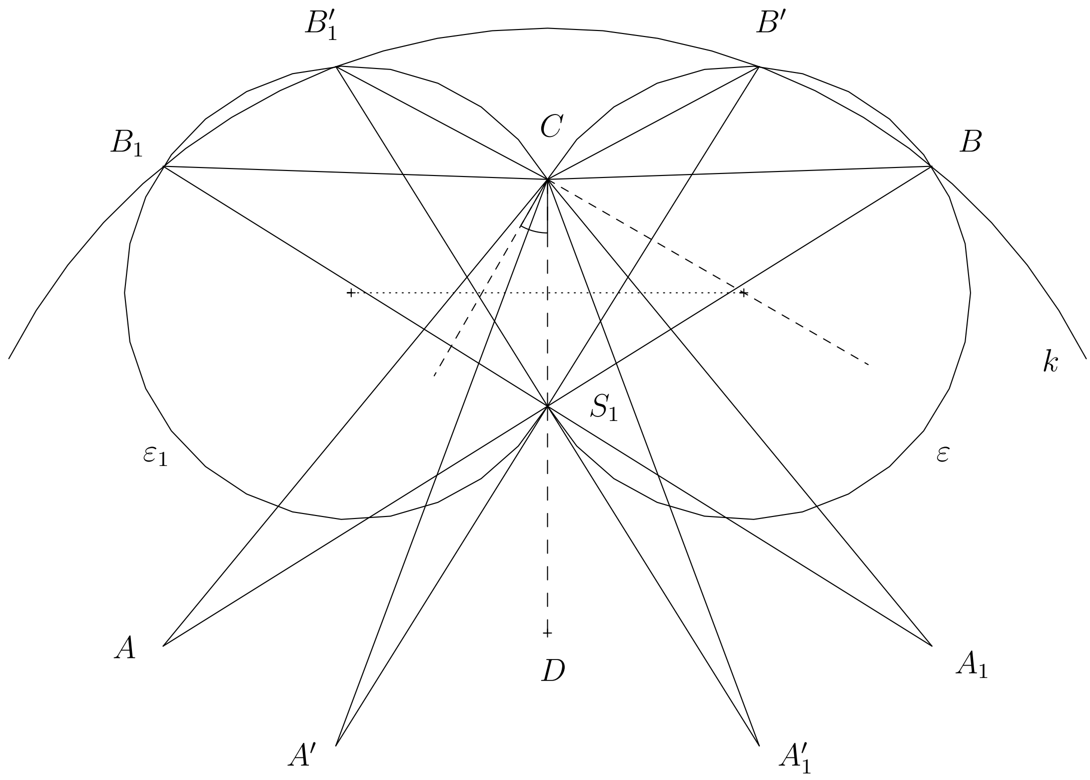


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku CS_1. Uvažujme středovou souměrnost $\mathcal{S}(S_1)$ se středem S_1, který je zároveň středem úsečky AB. Vrcholy trojúhelníka ABC a jeho obrazu tvoří vrcholy čtyřúhelníka, který pro jednoduchost označíme $BCAD$ (podle náčrtku). Prakticky tak nalezneme bod D a sestrojíme bod B, ze kterého je úsečka CS_1 vidět pod úhlem velikosti $\beta = 30°$ a který je od bodu D vzdálen $b = 8\,\text{cm}$. Bod B pak jednoduše zobrazíme v $\mathcal{S}(S_1)$ do bodu A.

Popis konstrukce.

0. CS_1; $|CS_1| = 3\,\text{cm}$
1. D; $D \in \mapsto CS_1 \wedge |CD| = 2 \cdot t_c$
2. ε; $\varepsilon(S_1C; \beta = 30°)$
3. k; $k(D, b = 8\,\text{cm})$
4. B; $B \in \varepsilon \cap k$
5. A; $A \in \mapsto BS_1 \wedge |AB| = 2 \cdot |BS_1|$
6. $\triangle ABC$

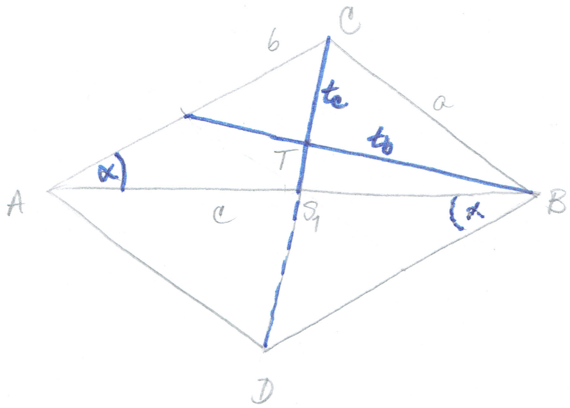
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má čtyři řešení. Existují dvě ekvigonály dané vlastnosti nad úsečkou CS_1 a každá z nich má navíc dva průsečíky s kružnicí k.

Příklad 20.

Zadání. Je dána úsečka CS_1, $|CS_1| = 3\,\text{cm}$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který je úsečka CS_1 těžnicí t_c a pro který dále platí: $t_b = 5\,\text{cm}$, $\alpha = 30°$.

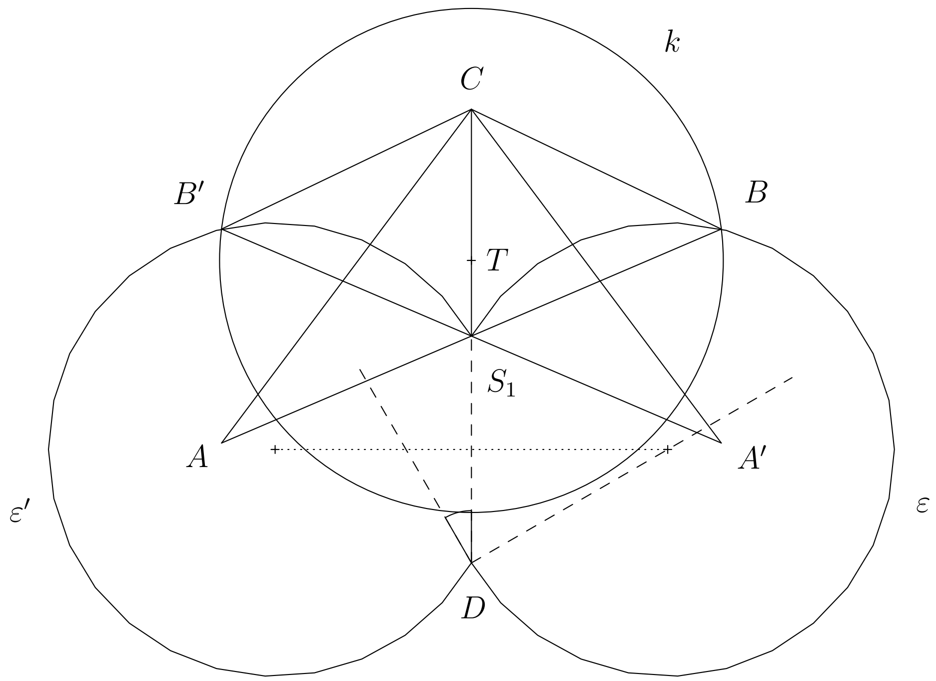


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku CS_1. Uvažujme středovou souměrnost $\mathcal{S}(S_1)$ se středem S_1, který je zároveň středem úsečky AB. Vrcholy trojúhelníka ABC a jeho obrazu tvoří vrcholy čtyřúhelníka, který pro jednoduchost označíme $BCAD$ (podle náčrtku). Bod T je těžiště trojúhelníka BCA. Úhel S_1BD má velikost α a těžiště trojúhelníků dělí těžnice v poměru 2 : 1. Pomocí těchto dvou podmínek dokážeme sestrojit trojúhelník TDB. Zbývající vrchol A hledaného trojúhelníka obdržíme zobrazením bodu B v $\mathcal{S}(S_1)$.

Popis konstrukce.

0. CS_1; $|CS_1| = 3\,\text{cm}$
1. D; $D \in \mapsto CS_1 \wedge |CD| = 2 \cdot t_c$
2. T; $T \in \mapsto CD \wedge 3 \cdot |TC| = |CD|$
3. ε; $\varepsilon(S_1D; \alpha = 30°)$
4. k; $k(T; \frac{2}{3} \cdot t_b = \frac{2}{3} \cdot 5\,\text{cm})$
5. B; $B \in \varepsilon \cap k$
6. A; $A \in \mapsto BS_1 \wedge |AB| = 2 \cdot |BS_1|$
7. $\triangle ABC$

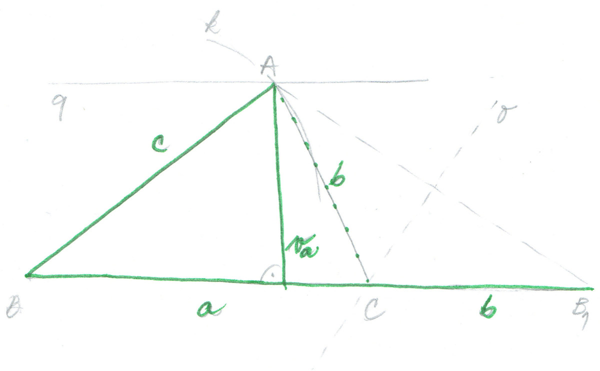
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení. Existují dvě ekvigonály dané vlastnosti nad úsečkou DS_1 a každá z nich má jeden průsečík s kružnicí k.

Příklad 21.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $a + b = 10\,\text{cm}$, $c = 5\,\text{cm}$, $v_a = 3\,\text{cm}$.

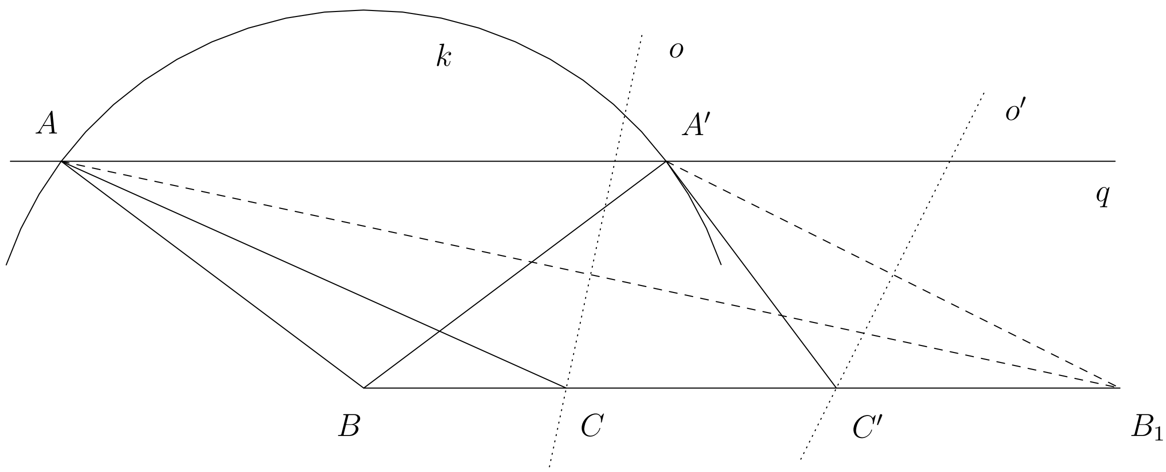


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku BB_1 o délce $a + b = 10\,\mathrm{cm}$. Bod A je pak od této úsečky vzdálen $v_a = 3\,\mathrm{cm}$ a od bodu B je vzdálen $c = 5\,\mathrm{cm}$, dokázali bychom ho tedy jednoduše sestrojit. Stejně tak střed S úsečky AC. Uvažujme tak osovou souměrnost $\mathcal{O}(o)$ s osou o, která je kolmá na úsečku AB_1 a prochází bodem S. Trojúhelník ACB_1 je pak osově symetrický podle osy o. Z této skutečnosti plyne poloha bodu C na úsečce BB_1.

Popis konstrukce.

1. BB_1; $|BB_1| = a + b = 10\,\mathrm{cm}$
2. q; $v(BB_1, q) = v_a = 3\,\mathrm{cm}$
3. k; $k(B; c = 5\,\mathrm{cm})$
4. A; $A \in q \cap k$
5. o; o je osa úsečky AB_1
6. C; $C \in BB_1 \cap o$
7. $\triangle ABC$

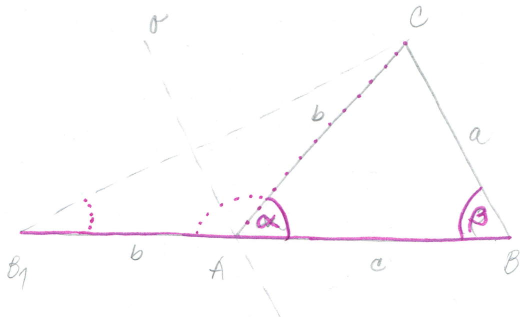
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky přímky q a kružnice k.

Příklad 22.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $b + c = 10\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.

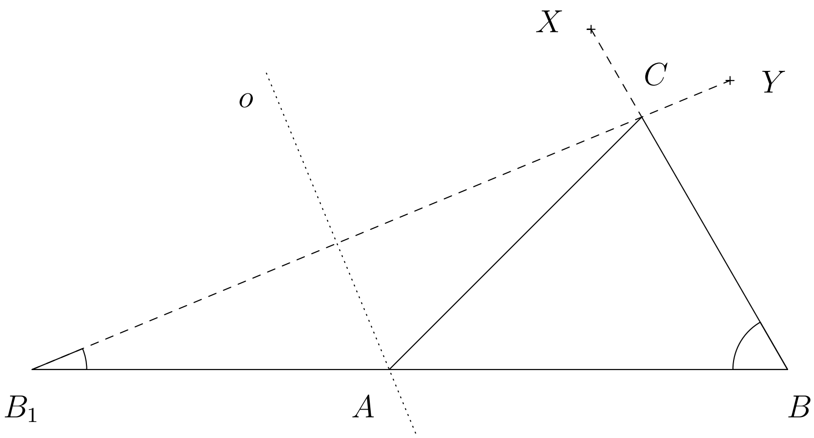


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku BB_1 o délce $b+c = 10\,\text{cm}$. Uvažujme osovou souměrnost $\mathcal{O}(o)$ s osou o, která je osou hledané úsečky CB_1. Trojúhelník ACB_1 je pak osově symetrický podle osy o, přičemž při vrcholu A má vnitřní úhel o velikosti $180° - \alpha$ a tedy při vrcholu B_1 se nachází vnitřní úhel o velikosti $\frac{1}{2}\alpha$. Dokázali bychom tak sestrojit trojúhelník B_1BC díky znalosti dvou úhlů a strany jimi sevřené. Bod A narýsujeme díky podmínce, že leží na ose o a na přímce BB_1.

Popis konstrukce.

1. BB_1; $|BB_1| = b + c = 10\,\text{cm}$
2. $\sphericalangle B_1BX$; $|\sphericalangle B_1BX| = \beta = 60°$
3. $\sphericalangle BB_1Y$; $|\sphericalangle BB_1Y| = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}45°$
4. C; $C \in BX \cap B_1Y$
5. o; o je osa úsečky CB_1
6. A; $A \in BB_1 \cap o$
7. $\triangle ABC$

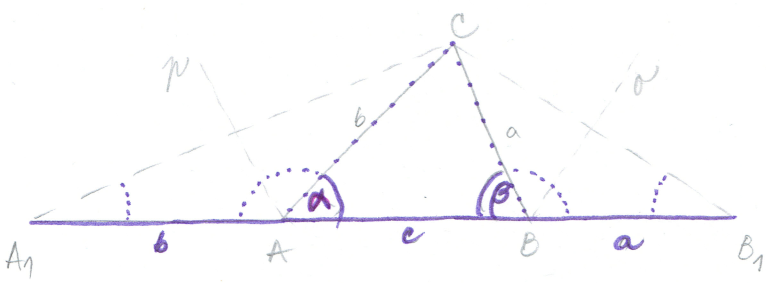
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení.

Příklad 23.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $O = a + b + c = 12\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$.

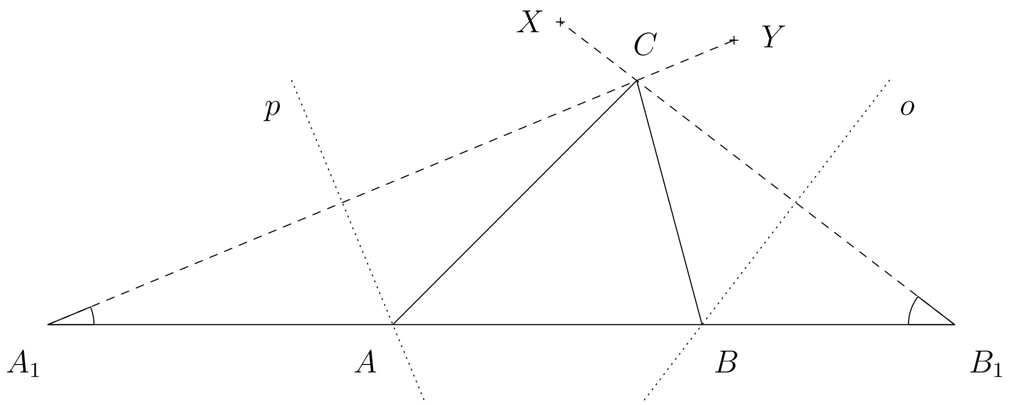


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku A_1B_1 o délce $O = 12\,\text{cm}$. Uvažujme osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ s osou o, která je osou hledané úsečky CB_1 a $\mathcal{O}(p)$ s osou p, která je osou hledané úsečky CA_1. Trojúhelník BB_1C (resp. ACA_1) je pak osově symetrický podle osy o (resp. p). Dokážeme tedy sestrojit trojúhelník A_1B_1C, protože známe délku strany A_1B_1 a přilehlé úhly o velikosti β_1 a α_1. Pro ně platí $2 \cdot \beta_1 + (180° - \beta) = 180°$, podobně pro α_1, z čehož už jednoduše vypočítáme, že $\beta_1 = \frac{1}{2}\beta$ a $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha$. Bod A (resp. B) leží na přímce A_1B_1 a p (resp. o), dokázali bychom je tedy sestrojit.

Popis konstrukce.

1. A_1B_1; $|A_1B_1| = a + b + c = 12\,\text{cm}$
2. $\sphericalangle A_1B_1X$; $|\sphericalangle A_1B_1X| = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}75°$
3. $\sphericalangle B_1A_1Y$; $|\sphericalangle B_1A_1Y| = \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}45°$
4. C; $C \in B_1X \cap A_1Y$
5. o; o je osa úsečky CB_1
6. B; $B \in A_1B_1 \cap o$
7. p; p je osa úsečky CA_1
8. A; $A \in A_1B_1 \cap p$
9. $\triangle ABC$

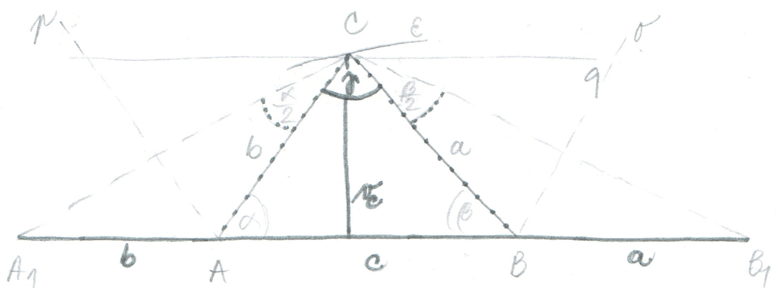
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení.

Příklad 24.

Zadání. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li: $O = a + b + c = 12\,\text{cm}$, $v_c = 3\,\text{cm}$, $\gamma = 60°$.

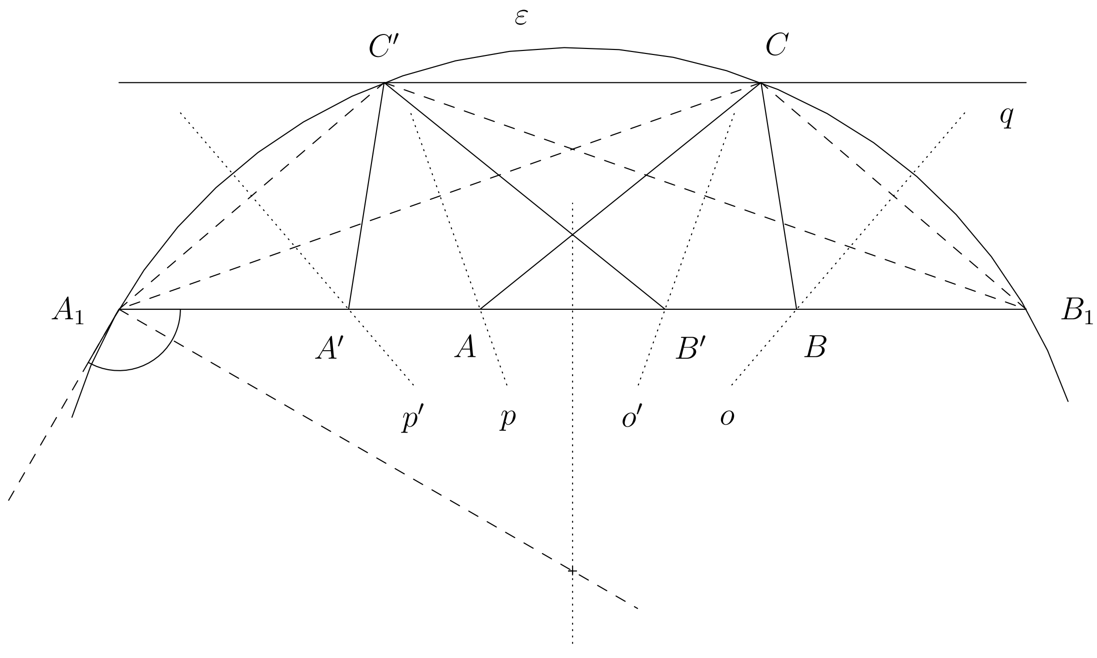


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku A_1B_1 o délce $O = 12\,\mathrm{cm}$. Uvažujme osové souměrnosti $\mathcal{O}(o)$ s osou o, která je osou hledané úsečky CB_1 a $\mathcal{O}(p)$ s osou p, která je osou hledané úsečky CA_1. Trojúhelník BB_1C (resp. ACA_1) je pak osově symetrický podle osy o (resp. p). Součet vnitřních úhlů trojúhelníka ABC je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (z toho vyplývá $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180°-\gamma}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$) a podobně jako v předchozím příkladě dokážeme vypočítat, že $|\sphericalangle A_1CA| = \frac{1}{2}\alpha$, $|\sphericalangle B_1CB| = \frac{1}{2}\beta$. Úhel A_1CB_1 má tedy velikost $(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) + \gamma = (90° - \frac{\gamma}{2}) + \gamma = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Dokážeme tedy sestrojit trojúhelník A_1B_1C, protože známe délku strany A_1B_1, velikost výšky trojúhelníka na tuto stranu v_c, navíc víme, že bod C leží na ekvigonále $90° + \frac{\gamma}{2}$ nad A_1B_1. Bod A (resp. B) leží na průniku přímek A_1B_1 a p (resp. o).

Popis konstrukce.

1. A_1B_1; $|A_1B_1| = a + b + c = 12\,\mathrm{cm}$
2. q; $v(A_1B_1, q) = v_c = 3\,\mathrm{cm}$
3. ε; $\varepsilon(A_1B_1; 90° + \frac{\gamma}{2} = 90° + \frac{60°}{2})$
4. C; $C \in q \cap \varepsilon$
5. o; o je osa úsečky CB_1
6. B; $B \in A_1B_1 \cap o$
7. p; p je osa úsečky CA_1
8. A; $A \in A_1B_1 \cap p$
9. $\triangle ABC$

Konstrukce.

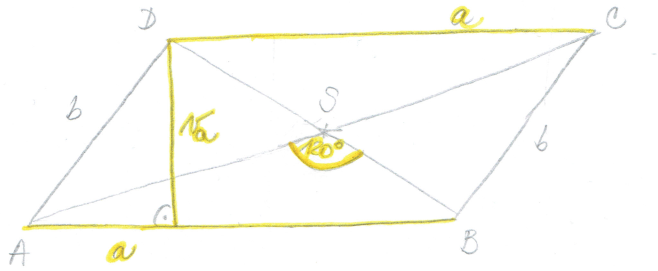


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky kružnice ε a přímky q.

3 Konstrukce čtyřúhelníků

Příklad 25.

Zadání. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, znáte-li: $a = 6\,\text{cm}$, $v_a = 3\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ASB| = 120°$ (kde S je průsečík úhlopříček).

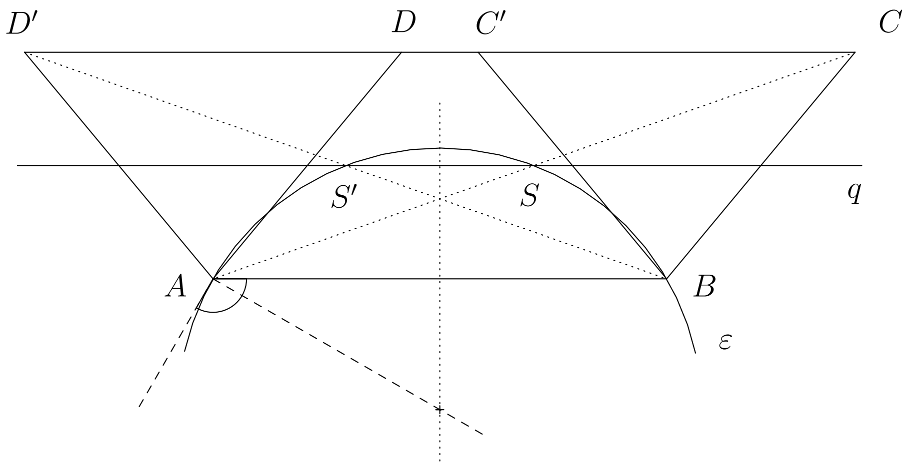


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku AB o délce $a = 6\,\text{cm}$. Protilehlá strana se nachází ve vzdálenosti $v_a = 3\,\text{cm}$ od strany AB, to znamená, že bod S leží ve vzdálenosti $\frac{1}{2} \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot$ $\cdot 3\,\text{cm}$. Zároveň se nachází na ekvigonále 120° nad úsečkou AB. Dokážeme ho tedy sestrojit a zbývající vrcholy rovnoběžníku $ABCD$ nalezneme pomocí středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$.

Popis konstrukce.

1. AB; $|AB| = a = 6\,\text{cm}$
2. q; $v(AB, q) = \frac{1}{2} \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot 3\,\text{cm}$
3. ε; $\varepsilon(AB; |\sphericalangle ASB| = 120°)$
4. S; $S \in q \cap \varepsilon$
5. C; $\mathcal{S}(S) : A \to C$
6. D; $\mathcal{S}(S) : B \to D$
7. rovnoběžník $ABCD$

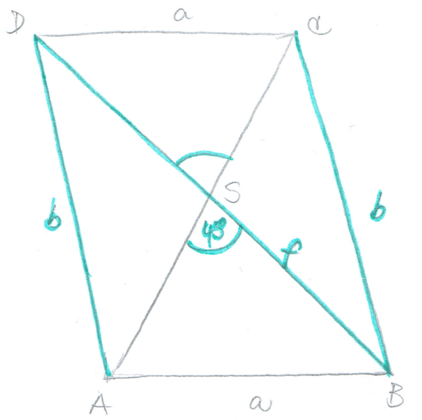
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky kružnice ε a přímky q.

Příklad 26.

Zadání. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, znáte-li: $b = 6\,\text{cm}$, $|BD| = f = 7,5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle ASB| = 45°$ (kde S je průsečík úhlopříček).

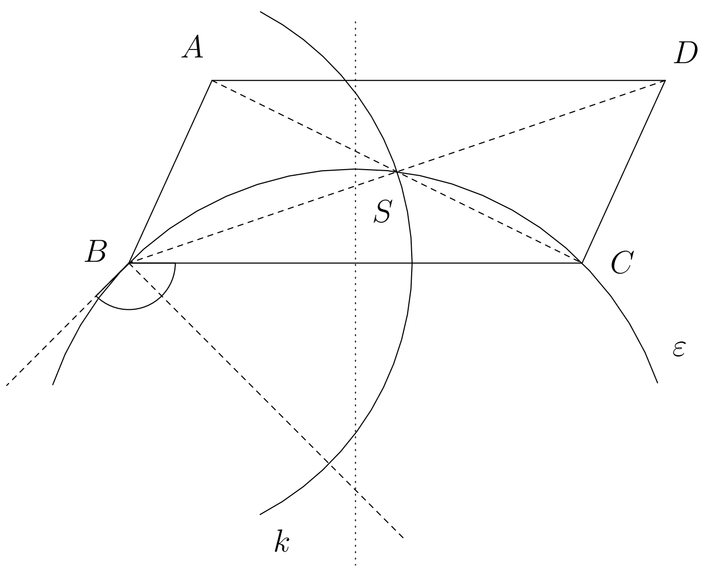


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku BC o délce $b = 6\,\text{cm}$. Střed S hledaného rovnoběžníku leží ve vzdálenosti $\frac{1}{2} \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 7,5\,\text{cm}$ od bodu B. Střed dále leží na ekvigonále $180° - 45°$ nad BC. Dokážeme ho díky těmto podmínkám zkonstruovat. Zbývající vrcholy rovnoběžníku $ABCD$ nalezneme pomocí středové souměrnosti $\mathcal{S}(S)$.

Popis konstrukce.

1. BC; $|BC| = b = 6\,\text{cm}$
2. k; $k(B; \frac{1}{2} \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 7,5\,\text{cm})$
3. ε; $\varepsilon(BC; 180° - |\sphericalangle ASB| = 180° - 45°)$
4. S; $S \in k \cap \varepsilon$
5. A; $\mathcal{S}(S) : C \to A$
6. D; $\mathcal{S}(S) : B \to D$
7. rovnoběžník $ABCD$

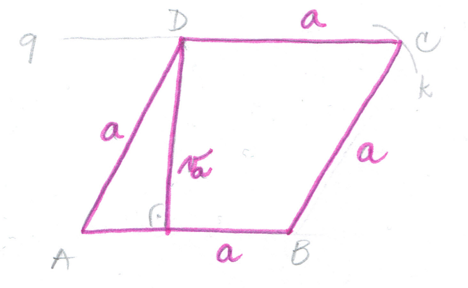
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

Příklad 27.

Zadání. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, znáte-li: $a = 4\,\text{cm}$, $v = 3\,\text{cm}$.

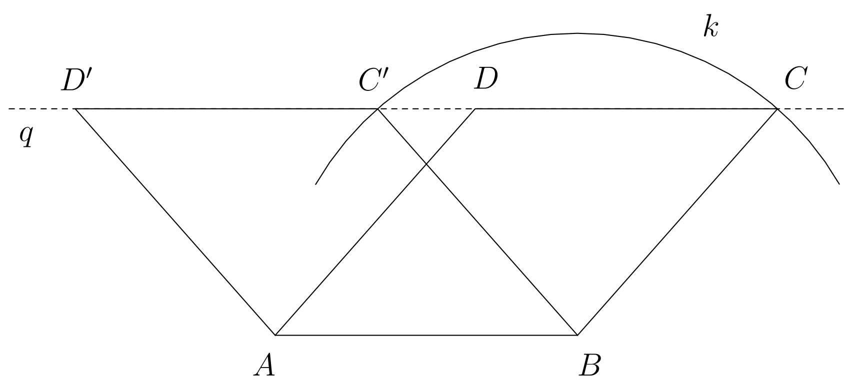


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku AB o délce $a = 4\,\text{cm}$. Protilehlá strana má ležet na přímce q ve vzdálenosti $v = 3\,\text{cm}$. Kosočtverec už pak jednoduše narýsujeme díky znalosti délky strany.

Popis konstrukce.

1. AB; $|AB| = a = 4\,\text{cm}$
2. q; $v(AB, q) = v = 3\,\text{cm}$
3. c; $c(B; a = 4\,\text{cm})$
4. C; $C \in c \cap q$
5. d; $A \in d \wedge d \parallel BC$
6. D; $D \in d \wedge |AD| = a = 4\,\text{cm}$
7. kosočtverec $ABCD$

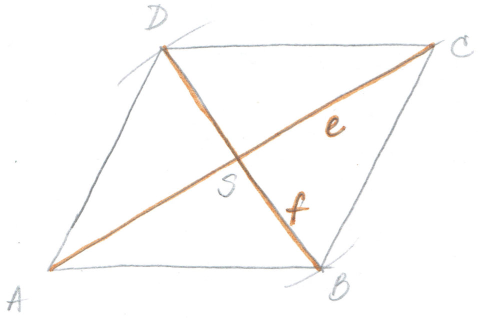
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky přímky q s kružnicí c.

Příklad 28.

Zadání. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, znáte-li: $|AC| = e = 6\,\mathrm{cm}$, $|BD| = f = 4\,\mathrm{cm}$.

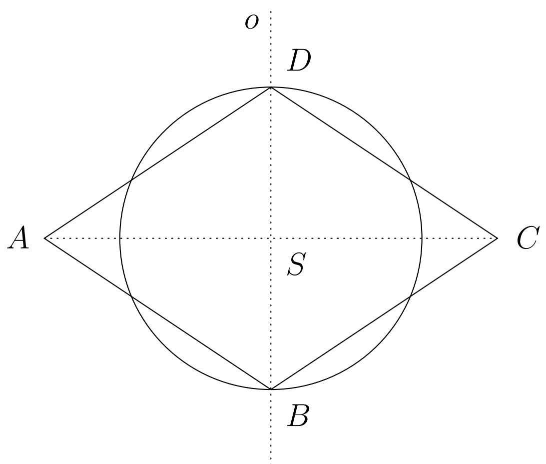


Rozbor. Nejprve umístíme úsečku AC o délce $e = 6\,\mathrm{cm}$. Body B a D leží na ose o úsečky AC ve vzdálenosti $\frac{1}{2} \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 4\,\mathrm{cm}$ od průsečíku přímky AC a osy o.

Popis konstrukce.

1. AC; $|AC| = e = 6\,\mathrm{cm}$
2. o; o je osa úsečky AC
3. S; $S \in o \cap AC$
4. k; $k(S; \frac{1}{2} \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 4\,\mathrm{cm})$
5. $\{B, D\}$; $\{B, D\} = o \cap k$
6. kosočtverec $ABCD$

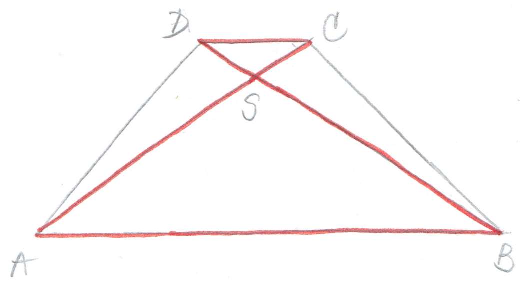
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení.

Příklad 29.

Zadání. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, znáte-li: $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 3\,\mathrm{cm}$, $|AC| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 7\,\mathrm{cm}$.

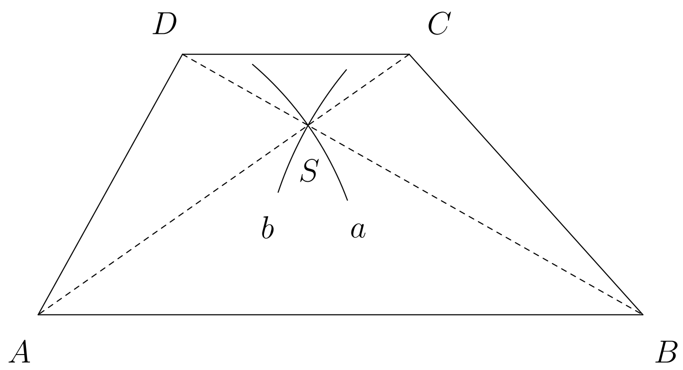


Rozbor. Uvažujme stejnolehlost $\mathcal{H}(S;\kappa)$ s vhodným koeficientem tak, že se trojúhelník ABS zobrazí na trojúhelník CDS. Pak všechny odpovídající si strany mají délky v poměru $|AB| : |CD| = 8 : 3$. Díky této skutečnosti dokážeme sestrojit například trojúhelník ABS, protože známe délky všech tří stran. Body C a D doplníme ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S;\kappa)$.

Popis konstrukce.

1. AB; $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$
2. a; $a(A; \frac{8}{11} \cdot |AC| = \frac{8}{11} \cdot 6\,\mathrm{cm})$
3. b; $b(B; \frac{8}{11} \cdot |BD| = \frac{8}{11} \cdot 7\,\mathrm{cm})$
4. S; $S \in a \cap b$
5. CD; $\mathcal{H}(S; \kappa = -\frac{3}{8}) : AB \to CD$
6. lichoběžník $ABCD$

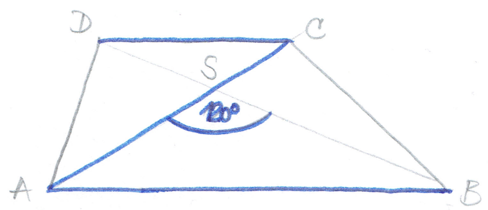
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení.

Příklad 30.

Zadání. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, znáte-li: $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$, $|AC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ASB| = 120°$ (kde S je průsečík úhlopříček).

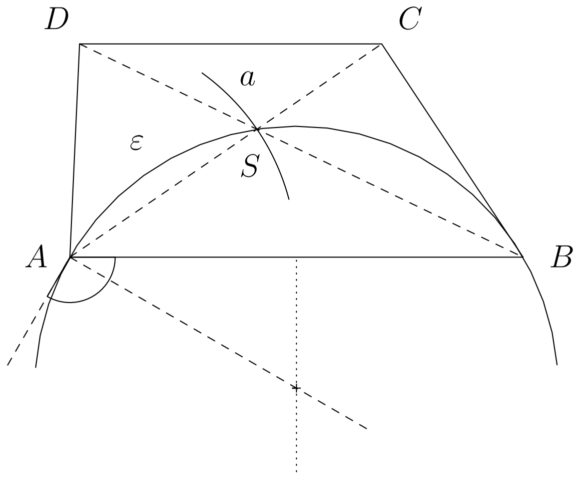


Rozbor. Uvažujme stejnolehlost $\mathcal{H}(S;\kappa)$ s vhodným koeficientem tak, že se trojúhelník ABS zobrazí na trojúhelník CDS. Pak všechny odpovídající si strany mají délky v poměru $|AB| : |CD| = 3 : 2$. Díky této skutečnosti dokážeme sestrojit například trojúhelník ABS, protože známe délky dvou stran a víme, že bod S leží na ekvigonále velikosti $|\sphericalangle ASB| = 120°$ nad AB. Body C a D doplníme ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S;\kappa)$.

Popis konstrukce.

1. AB; $|AB| = 6\,\text{cm}$
2. a; $a(A; \frac{3}{5} \cdot |AC| = \frac{3}{5} \cdot 5\,\text{cm})$
3. ε; $\varepsilon(AB; |\sphericalangle ASB| = 120°)$
4. S; $S \in a \cap \varepsilon$
5. CD; $\mathcal{H}(S; \kappa = -\frac{2}{3}) : AB \to CD$
6. lichoběžník $ABCD$

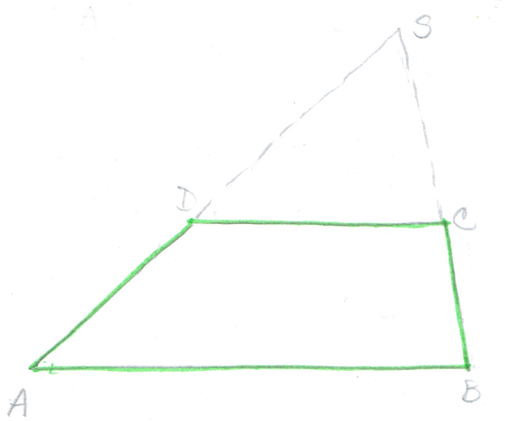
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení.

Příklad 31.

Zadání. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, znáte-li: $|AB| = 7\,\text{cm}$, $|BC| = 4\,\text{cm}$, $|CD| = 2\,\text{cm}$, $|AD| = 3\,\text{cm}$.

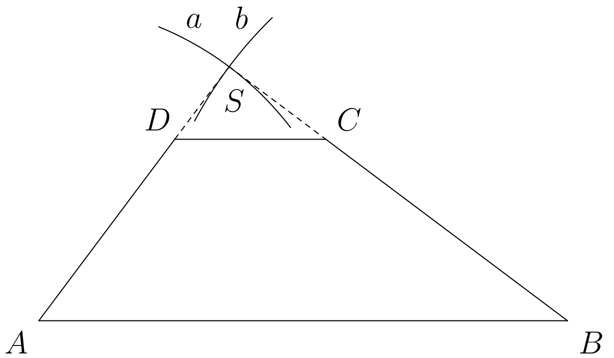


Rozbor. Uvažujme stejnolehlost $\mathcal{H}(S;\kappa)$ s vhodným koeficientem tak, že se trojúhelník ABS zobrazí na trojúhelník DCS, přičemž bod S je průsečíkem přímek AD a BC. Pak všechny odpovídající si strany mají délky v poměru $|AB| : |CD| = 7 : 2$. Strany AS a BS trojúhelníka ABS tak mají $\frac{7}{5}$ krát větší délku než zadané strany AD a BC lichoběžníka $ABCD$. Body C a D doplníme ve stejnolehlosti $\mathcal{H}(S;\kappa)$.

Popis konstrukce.

1. AB; $|AB| = 7\,\mathrm{cm}$
2. a; $a(A; \frac{7}{5}\cdot|AD| = \frac{7}{5}\cdot 3\,\mathrm{cm})$
3. b; $b(B; \frac{7}{5}\cdot|BC| = \frac{7}{5}\cdot 4\,\mathrm{cm})$
4. S; $S \in a \cap b$
5. CD; $\mathcal{H}(S;\kappa = \frac{2}{7}) : AB \to CD$
6. lichoběžník $ABCD$

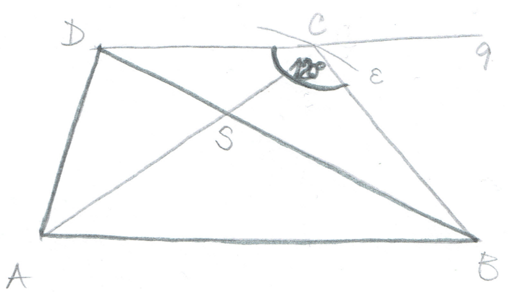
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení.

Příklad 32.

Zadání. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, znáte-li: $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 6\,\mathrm{cm}$, $|AD| = 4\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle BCD| = 120°$.

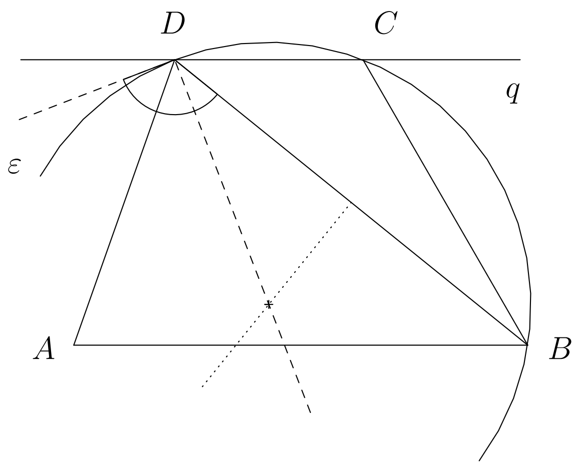


Rozbor. Nejprve narýsujeme trojúhelník ABD, přitom známe délky všech stran. Bod C pak leží na ekvigonále 120° nad BD a na rovnoběžce k přímce AB procházející bodem D.

Popis konstrukce.

1. $\triangle ABD$; $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 6\,\mathrm{cm}$, $|AD| = 4\,\mathrm{cm}$
2. ε; $\varepsilon(BD; |\sphericalangle BCD| = 120°)$
3. q; $D \in q \wedge q \parallel AB$
4. C; $C \in q \cap \varepsilon$
5. lichoběžník $ABCD$

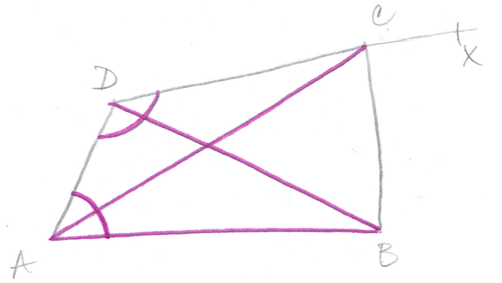
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení.

Příklad 33.

Zadání. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li: $|AB| = 7\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 5\,\mathrm{cm}$, $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle BAD| = 45°$, $|\sphericalangle ADC| = 150°$.



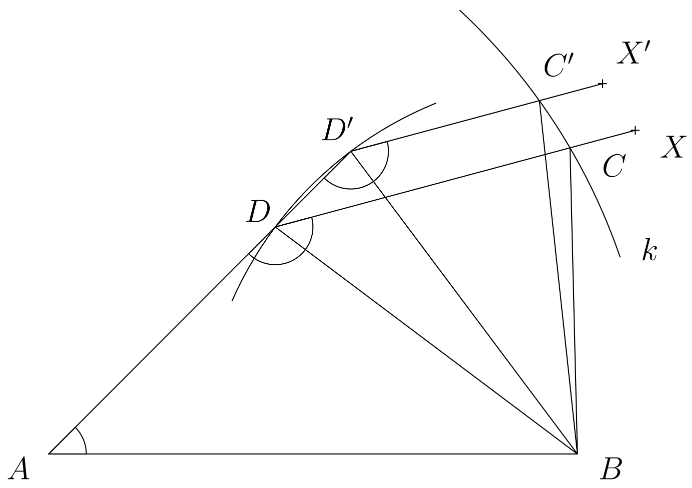
Rozbor. Nejprve narýsujeme trojúhelník ABD, přitom známe délky dvou stran a velikost úhlu při vrcholu A. Bod C leží ve vzdálenosti $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$ od bodu A a na rameni DX úhlu ADX o velikosti $|\sphericalangle ADC| = 150°$.

Popis konstrukce.

1. $\triangle ABD$; $|AB| = 7\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 5\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle BAD| = 45°$
2. k; $k(A; |AC| = 8\,\mathrm{cm})$
3. $\sphericalangle ADX$; $|\sphericalangle ADX| = |\sphericalangle ADC| = 150°$

4. C; $C \in \mapsto DX \cap k$
5. čtyřúhelník $ABCD$

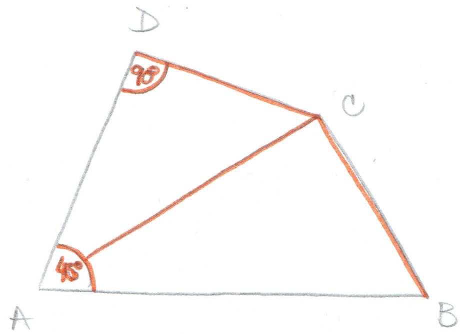
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení. Existují dva trojúhelníky $\triangle ABD$ daných vlastností.

Příklad 34.

Zadání. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li: $|BC| = 5\,\text{cm}$, $|CD| = 5\,\text{cm}$, $|AC| = 6\,\text{cm}$, $|\sphericalangle BAC| = 45°$, $|\sphericalangle ADC| = 90°$.

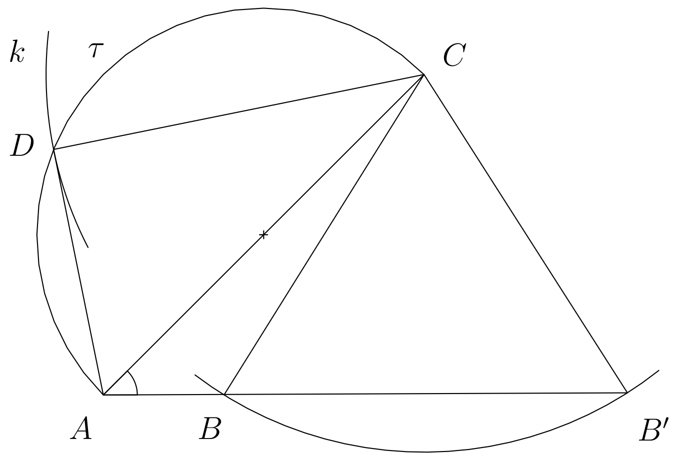


Rozbor. Nejprve narýsujeme trojúhelník ABC, přitom známe délky dvou stran a velikost úhlu při vrcholu A. Bod D leží ve vzdálenosti $|CD| = 5\,\text{cm}$ od bodu C a na Thaletově kružnici nad AC.

Popis konstrukce.

1. $\triangle ABC$; $|BC| = 5\,\text{cm}$, $|AC| = 6\,\text{cm}$, $|\sphericalangle BAC| = 45°$
2. k; $k(C; |CD| = 5\,\text{cm})$
3. τ; $\tau(AC)$
4. D; $D \in k \cap \tau$
5. čtyřúhelník $ABCD$

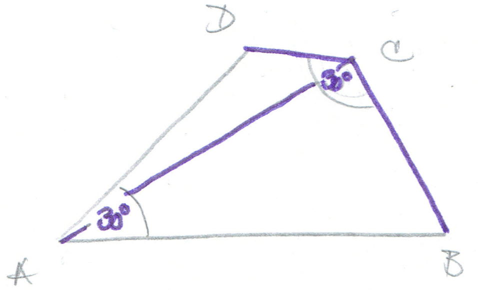
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení. Existují dva trojúhelníky $\triangle ABC$ daných vlastností.

Příklad 35.

Zadání. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li: $|BC| = 6\,\text{cm}$, $|CD| = 3\,\text{cm}$, $|AC| = 5\,\text{cm}$, $|\sphericalangle DAB| = 30°$, $|\sphericalangle BCD| = 30°$.

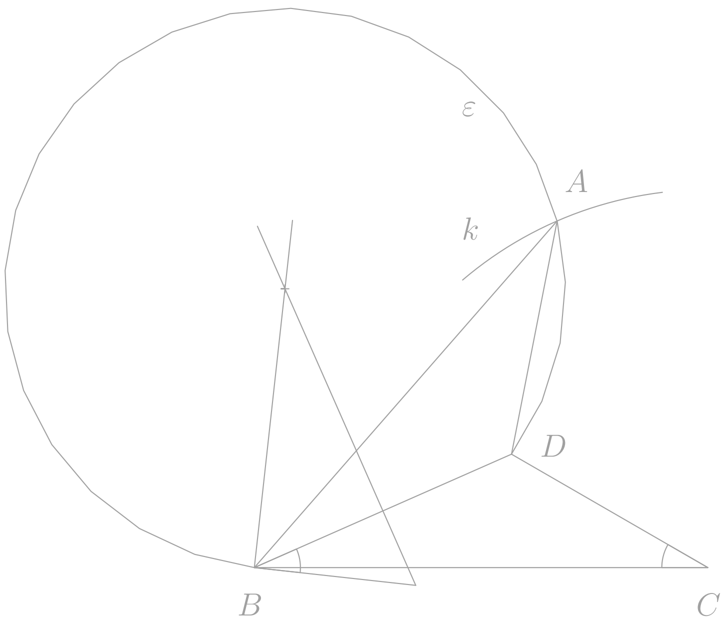


Rozbor. Nejprve narýsujeme trojúhelník BCD, přitom známe délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného. Bod A leží ve vzdálenosti $|AC| = 5\,\text{cm}$ od bodu C a na ekvigonále $30°$ nad BD.

Popis konstrukce.

1. $\triangle BCD$ (sus); $|BC| = 6\,\text{cm}$, $|CD| = 3\,\text{cm}$, $|\sphericalangle BCD| = 30°$
2. k; $k(C; |AC| = 5\,\text{cm})$
3. ε; $\varepsilon(BD; |\sphericalangle DAB| = 30°)$
4. A; $A \in k \cap \varepsilon$
5. čtyřúhelník $ABCD$

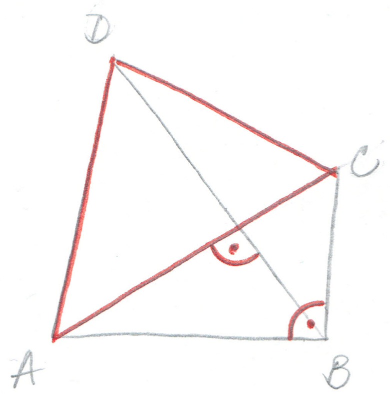
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha nemá řešení. Čtyřúhelník vzniklý konstrukcí dle popisu nesplňuje zadanou podmínku konvexnosti.

Příklad 36.

Zadání. Sestrojte konvexní čtyřúhelník $ABCD$, znáte-li: $|AC| = 6\,\mathrm{cm}$, $|AD| = 5\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ABC| = 90°$, $|\sphericalangle ASB| = 90°$ (S je průsečík úhlopříček).

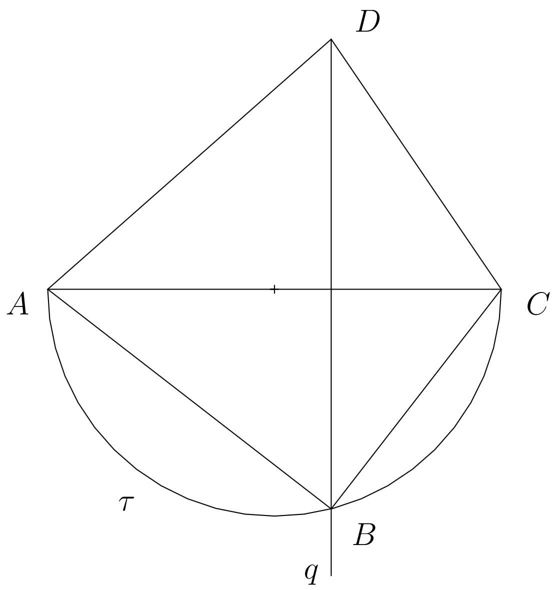


Rozbor. Nejprve narýsujeme trojúhelník ACD, přičemž známe délky všech tří stran. Bod B leží na Thaletově kružnici nad úsečkou AC. Zároveň se nachází na přímce kolmé k úsečce AC procházející bodem D.

Popis konstrukce.

1. $\triangle ACD$ (sss); $|AC| = 6\,\mathrm{cm}$, $|AD| = 5\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$
2. q; $D \in q \wedge q \perp AC$
3. τ; $\tau(AC)$
4. B; $B \in q \cap \tau$
5. čtyřúhelník $ABCD$

Konstrukce.



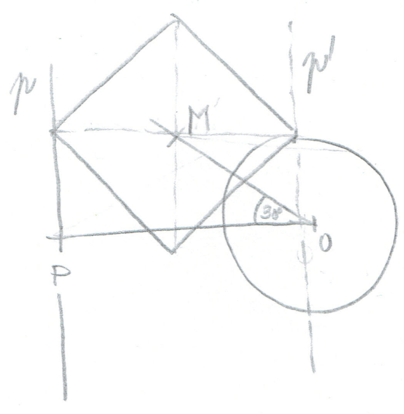
Diskuse počtu řešení. Úloha má jedno řešení. Přímka q a kružnice τ mají sice dva průsečíky, ale pouze jedno řešení této úlohy vede na *konvexní* čtyřúhelník.

4 Další úlohy

Příklad 37.

Zadání. Je dána úsečka OP, $|OP| = 4\,\mathrm{cm}$, kružnice $k(O; 2,5\,\mathrm{cm})$ a přímka p kolmá na úsečku OP a procházející bodem P. Dále je zadán jediný bod M, pro který platí $|OM| = 3\,\mathrm{cm}$ a $|\sphericalangle POM| = 30°$.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby platilo: $A \in k$, $C \in p$, bod M je středem čtverce $ABCD$.

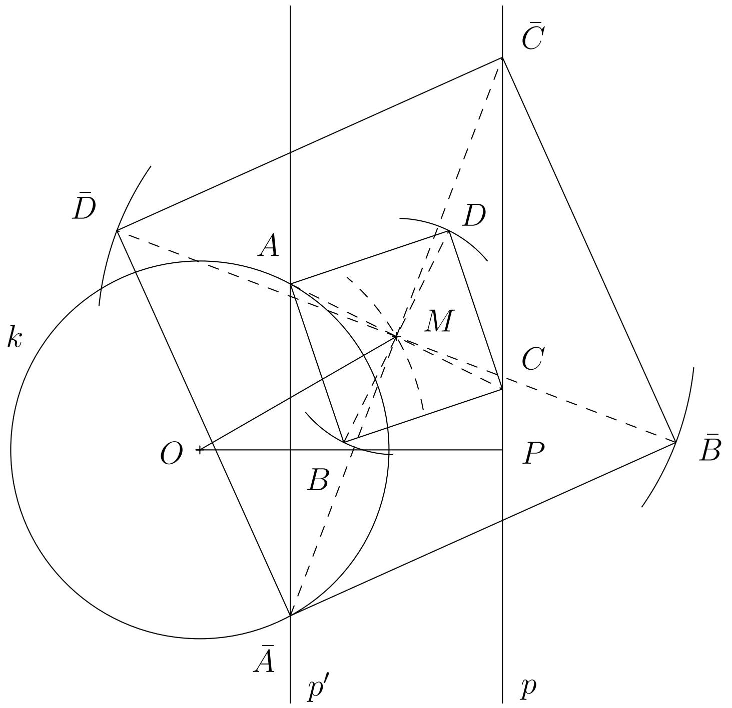


Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy s pomocí úsečky OP — bod M, přímku p a kružnici k. Pro narýsování čtverce $ABCD$ uvažujme středovou souměrnost $\mathcal{S}(M)$. V té se zobrazí přímka p na přímku p'. Jestliže $C \in p$, pak i $A \in p'$, protože bod A je středově souměrný podle M s bodem C. Bod A tedy dokážeme sestrojit jako průsečík přímky p' a kružnice k. Zbývající body najdeme s pomocí středové souměrnosti $\mathcal{S}(M)$ a vlastností čtverce.

Popis konstrukce.

0. úsečka OP, bod M, přímka p, kružnice k (zadaných vlastností)
1. p'; $\mathcal{S}(M) : p \to p'$
2. A; $A \in k \cap p'$
3. C; $\mathcal{S}(M) : A \to C$
4. o; $M \in o \wedge o \perp AC$
5. m; $m(M; |AM|)$
6. $\{B, D\}$; $\{B, D\} = o \cap m$
7. čtverec $ABCD$

Konstrukce.

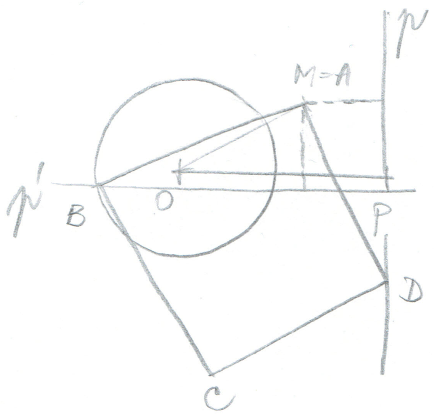


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky přímky p' s kružnicí k.

Příklad 38.

Zadání. Je dána úsečka OP, $|OP| = 4\,\mathrm{cm}$, kružnice $k(O; 2{,}5\,\mathrm{cm})$ a přímka p kolmá na úsečku OP a procházející bodem P. Dále je zadán jediný bod M, pro který platí $|OM| = 3\,\mathrm{cm}$ a $|\sphericalangle POM| = 30°$.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby platilo: $B \in k$, $D \in p$, $A = M$.

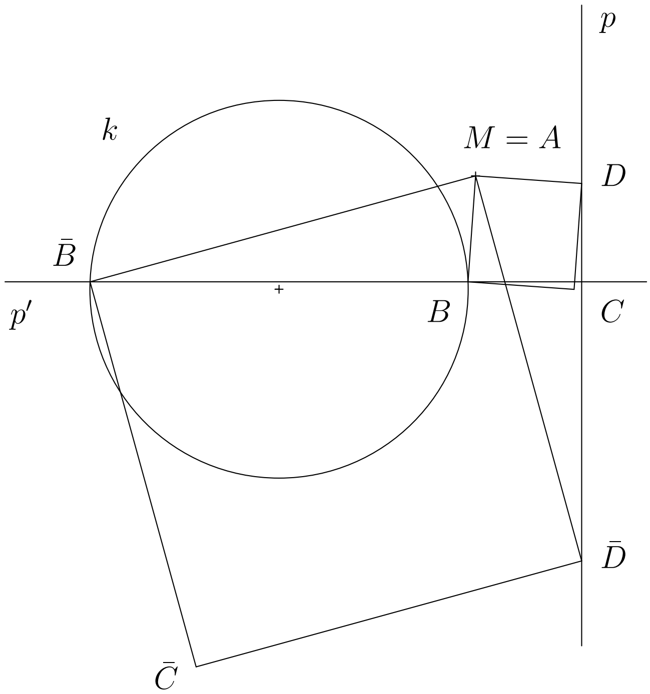


Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy s pomocí úsečky OP — bod M, přímku p a kružnici k. Pro narýsování čtverce $ABCD$ uvažujme otočení $\mathcal{R}(M; \mp 90°)$ o úhel $\mp 90°$ se středem M. V tomto otočení se bod $D \in p$ se zobrazí na bod $B \in k$. Pak se i přímka p zobrazí na přímku p' a platí $B \in p'$. Bod B tedy leží na průsečíku přímky p' a kružnice k. Bod A splývá s bodem M a zbývající body získáme v daném otočení nebo s využitím vlastností čtverce.

Popis konstrukce.

0. úsečka OP, bod M, přímka p, kružnice k (zadaných vlastností)
1. p'; $\mathcal{R}(M; \mp 90°) : p \to p'$
2. B; $B \in k \cap p'$
3. D; $\mathcal{R}(M; \pm 90°) : B \to D$
4. A; $A = M$
5. b; $B \in b \wedge b \perp AB$
6. d; $D \in d \wedge d \perp AD$
7. C; $C \in b \cap d$
8. čtverec $ABCD$

Konstrukce.

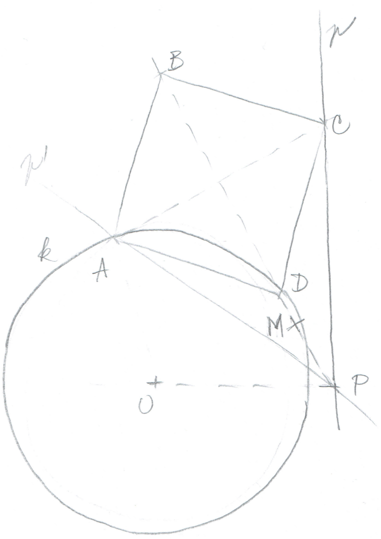


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky přímky p' s kružnicí k.

Příklad 39.

Zadání. Je dána úsečka OP, $|OP| = 4\,\text{cm}$, kružnice $k(O; 2\,\text{cm})$ a přímka p kolmá na úsečku OP a procházející bodem P. Dále je zadán jediný bod M, pro který platí $|OM| = 2,5\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle POM| = 30°$.

Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby platilo: $A \in k$, $C \in p$, $BD \subset PM$.



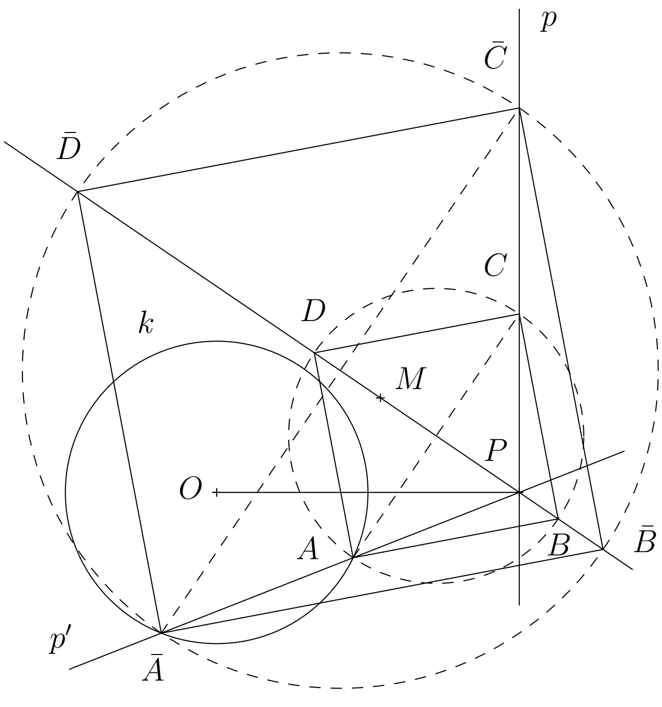
Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy s pomocí úsečky OP — bod M, přímku p a kružnici k. Pro narýsování čtverce $ABCD$ uvažujme osovou souměrnost $\mathcal{O}(PM)$ s osou souměrnosti, kterou je přímka PM. V tomto zobrazení se bod $C \in p$ se zobrazí na bod $A \in k$. Pak se i přímka p zobrazí na přímku p' a platí $A \in p'$. Bod A

tedy leží na průsečíku přímky p' a kružnice k. Zbývající body získáme s využitím vlastností čtverce a osové souměrnosti $\mathcal{O}(PM)$.

Popis konstrukce.

0. úsečka OP, bod M, přímka p, kružnice k (zadaných vlastností)
1. p'; $\mathcal{O}(PM) : p \to p'$
2. A; $A \in k \cap p'$
3. C; $\mathcal{O}(PM) : A \to C$
4. S; S je střed úsečky AC
5. o; o je osa úsečky AC
6. m; $m(S; |AS|)$
7. $\{B, D\}$; $\{B, D\} = o \cap m$
8. čtverec $ABCD$

Konstrukce.

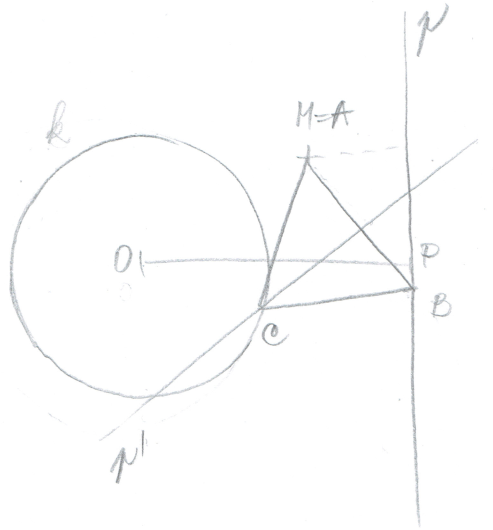


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky přímky p' s kružnicí k.

Příklad 40.

Zadání. Je dána úsečka OP, $|OP| = 4\,\mathrm{cm}$, kružnice $k(O; 2,5\,\mathrm{cm})$ a přímka p kolmá na úsečku OP a procházející bodem P. Dále je zadán jediný bod M, pro který platí $|OM| = 3\,\mathrm{cm}$ a $|\sphericalangle POM| = 30°$.

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby platilo: $C \in k$, $B \in p$, $A = M$.

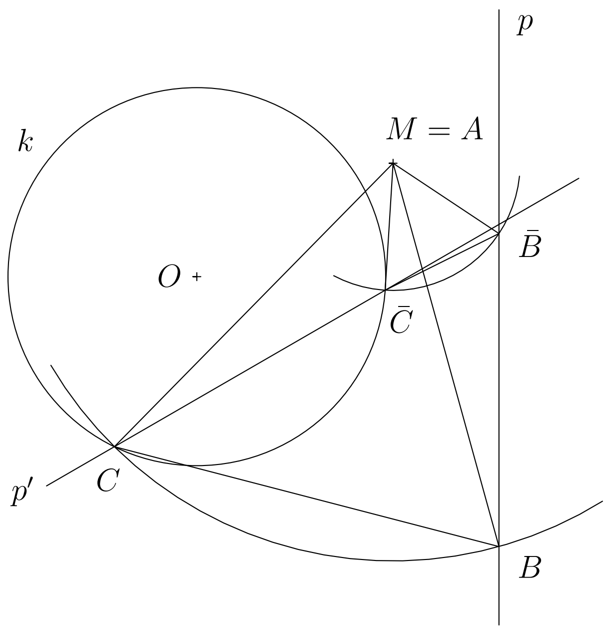


Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy s pomocí úsečky OP — bod M, přímku p a kružnici k. Pro narýsování rovnostranného trojúhelníka ABC uvažujme otočení $\mathcal{R}(M; \mp 60°)$, ve kterém se zobrazí přímka p na přímku p'. Jestliže $B \in p$, pak i $C \in p'$, protože bod B se v daném otočení zobrazí do bodu C. Bod C tedy dokážeme sestrojit jako průsečík přímky p' a kružnice k. Bod A splývá s bodem M a bod B najdeme s pomocí vlastností otočení $\mathcal{R}(M; \mp 60°)$.

Popis konstrukce.

0. úsečka OP, bod M, přímka p, kružnice k (zadaných vlastností)
1. p'; $\mathcal{R}(M; \mp 60°) : p \to p'$
2. C; $C \in k \cap p'$
3. A; $A = M$
4. B; $\mathcal{R}(M; \pm 60°) : C \to B$
5. $\triangle ABC$

Konstrukce.

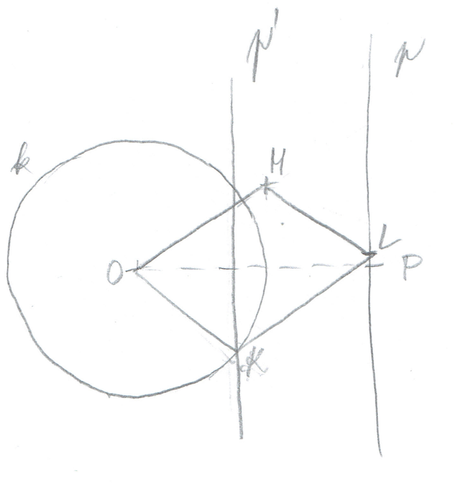


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky přímky p' s kružnicí k.

Příklad 41.

Zadání. Je dána úsečka OP, $|OP| = 4\,\text{cm}$, kružnice $k(O; 2,5\,\text{cm})$ a přímka p kolmá na úsečku OP a procházející bodem P. Dále je zadán jediný bod M, pro který platí $|OM| = 3\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle POM| = 30°$.

Sestrojte rovnoběžník $MOKL$ tak, aby platilo: $K \in k$, $L \in p$.

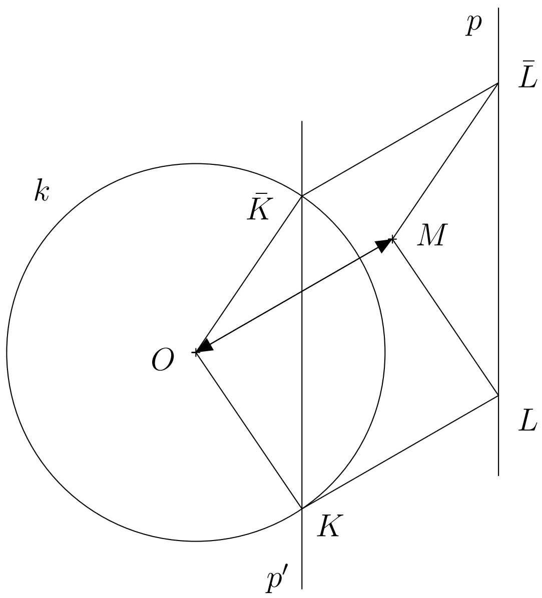


Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy s pomocí úsečky OP — bod M, přímku p a kružnici k. Pro narýsování rovnostranného trojúhelníka ABC uvažujme posunutí $\mathcal{T}(\overrightarrow{MO})$, ve kterém se přímka p zobrazí na přímku p'. Jestliže $L \in p$, pak i $K \in p'$, protože bod L se v daném posunutí zobrazí do bodu K. Bod K pak dokážeme sestrojit jako průsečík přímky p' a kružnice k. Bod L pak nalezneme jednoduše inverzním zobrazením, než bylo posunutí $\mathcal{T}(\overrightarrow{MO})$.

Popis konstrukce.

0. úsečka OP, bod M, přímka p, kružnice k (zadaných vlastností)
1. p'; $\mathcal{T}(\overrightarrow{MO}) : p \to p'$
2. K; $K \in k \cap p'$
3. L; $\mathcal{T}(\overrightarrow{OM}) : K \to L$
4. rovnoběžník $MOKL$

Konstrukce.

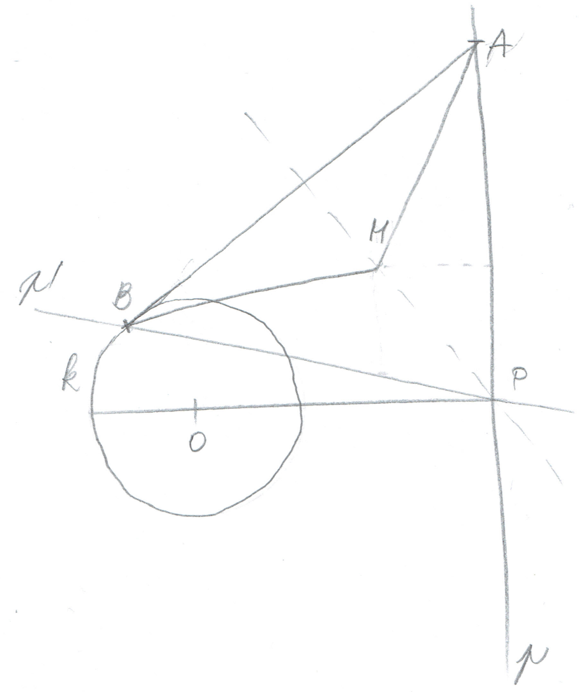


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky přímky p' s kružnicí k.

Příklad 42.

Zadání. Je dána úsečka OP, $|OP| = 4\,\mathrm{cm}$, kružnice $k(O; 2,5\,\mathrm{cm})$ a přímka p kolmá na úsečku OP a procházející bodem P. Dále je zadán jediný bod M, pro který platí $|OM| = 3\,\mathrm{cm}$ a $|\sphericalangle POM| = 30°$.

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABM se základnou AB tak, aby platilo: $B \in k$, $A \in p$, $v_c \subset PM$.

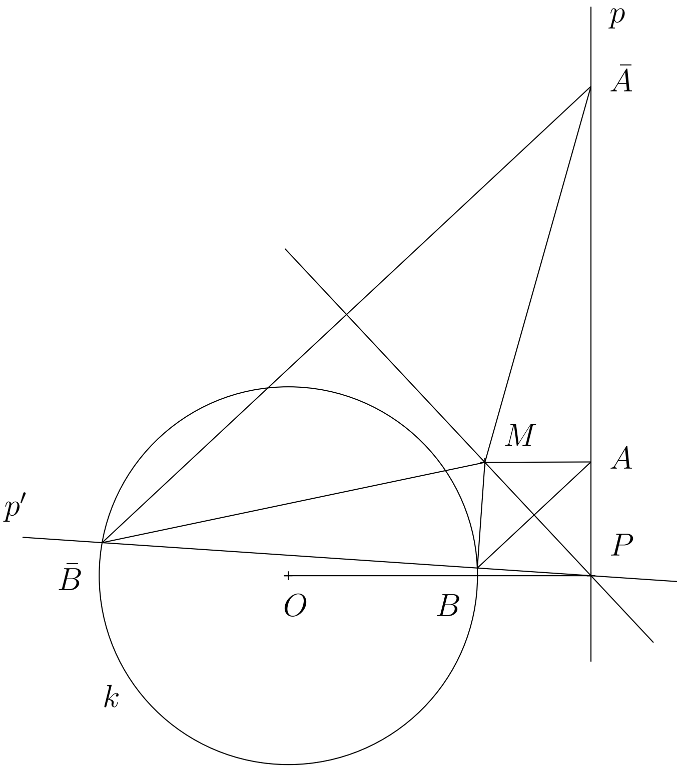


Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy s pomocí úsečky OP — bod M, přímku p a kružnici k. Pro narýsování rovnostranného trojúhelníka ABC uvažujme osovou souměrnost $\mathcal{O}(MP)$, přičemž trojúhelník ABC je souměrný podle přímky MP. V dané osové souměrnosti se přímka p zobrazí na přímku p' a jestliže $A \in p$, pak i $B \in p'$, protože se bod A zobrazí v $\mathcal{O}(MP)$ do bodu B. Bod B tedy dokážeme sestrojit jako průsečík přímky p' a kružnice k. Bod A nalezneme jednoduše využitím osové souměrnosti $\mathcal{O}(MP)$.

Popis konstrukce.

0. úsečka OP, bod M, přímka p, kružnice k (zadaných vlastností)
1. p';$\mathcal{O}(MP) : p \to p'$
2. B; $B \in k \cap p'$
3. A; $\mathcal{O}(MP) : B \to A$
4. $\triangle ABM$

Konstrukce.

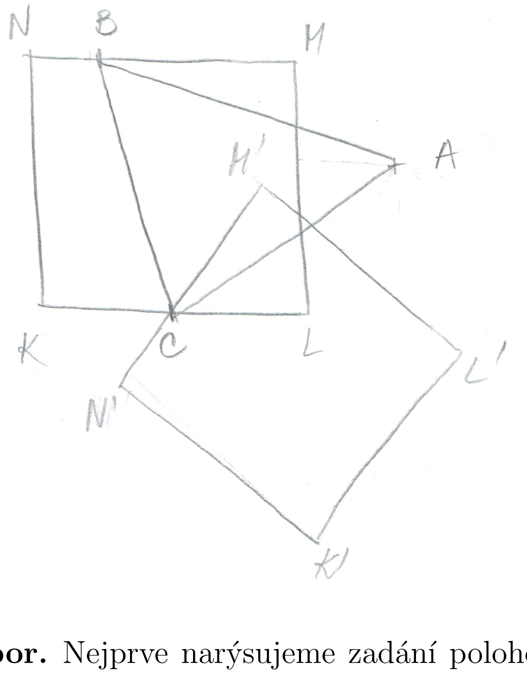


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky přímky p' s kružnicí k.

Příklad 43.

Zadání. Je dán čtverec $KLMN$, $|KL| = 6\,\text{cm}$. Vně čtverce sestrojte bod A tak, aby platilo $|AM| = 3\,\text{cm}$, $|AL| = 4\,\text{cm}$

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrcholy B, C ležely na obvodu čtverce $KLMN$.

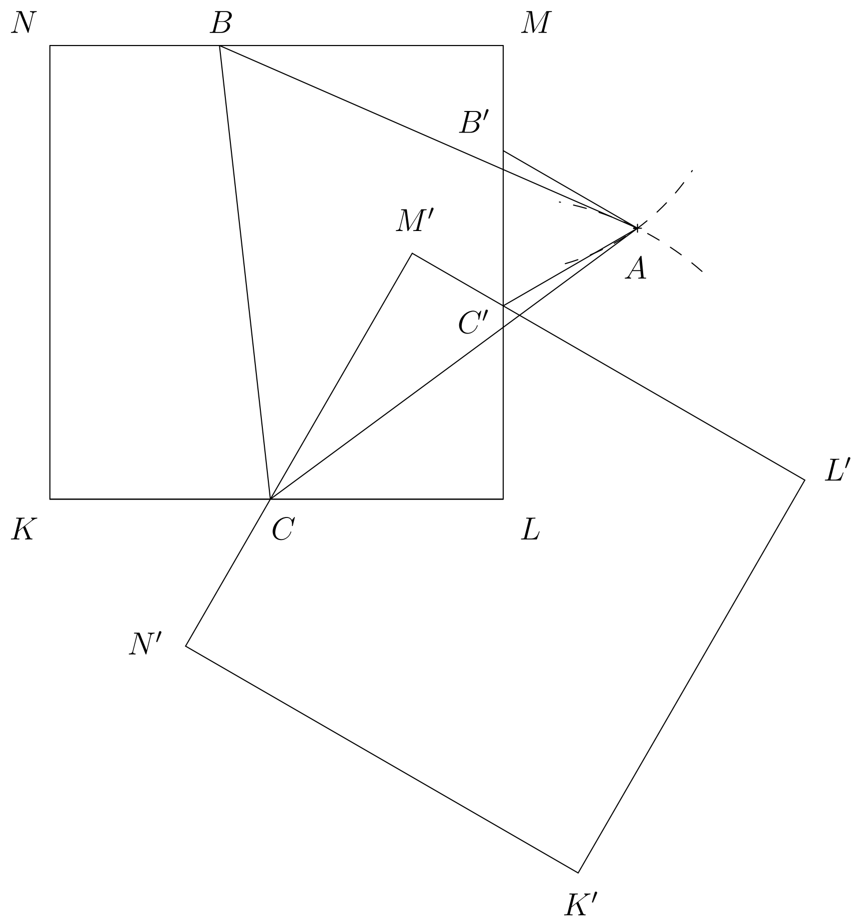


Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy — čtverec $KLMN$ a bod A. Pro narýsování rovnostranného trojúhelníka ABC uvažujme otočení $\mathcal{R}(A; \pm 60°)$. V daném otočení zobrazíme čtverec $KLMN$ na čtverec $K'L'M'N'$. Jestliže $B \in KLMN$, pak i $C \in K'L'M'N'$, protože se bod B v tomtéž otočení zobrazí na bod C. Bod C tak nalezneme jako průsečík dvou čtverců $KLMN$ a $K'L'M'N'$. Bod B doplníme jako vzor bodu C v zobrazení $\mathcal{R}(A; \pm 60°)$.

Popis konstrukce.

0. čtverec $KLMN$, bod A (zadaných vlastností)
1. $K'L'M'N'$;$\mathcal{R}(A; \pm 60°) : KLMN \to K'L'M'N'$
2. C; $C \in KLMN \cap K'L'M'N'$
3. B; $\mathcal{R}(A; \mp 60°) : C \to B$
4. $\triangle ABC$

Konstrukce.

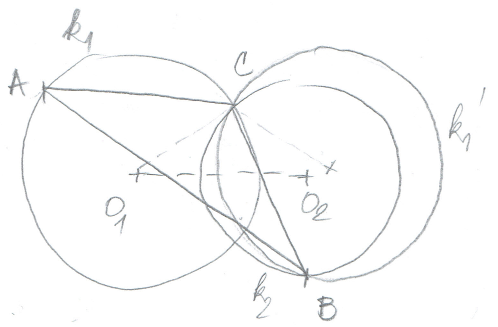


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky čtverců $KLMN$ a $K'L'M'N'$.

Příklad 44.

Zadání. Kružnice $k_1(O_1; 5\,\mathrm{cm})$, $k_2(O_2; 3\,\mathrm{cm})$, $|O_1O_2| = 3\,\mathrm{cm}$ se protínají ve dvou bodech. Označte C jeden z těchto průsečíků.

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby platilo: $A \in k_1$, $B \in k_2$, $|\sphericalangle ACB| = 105°$.

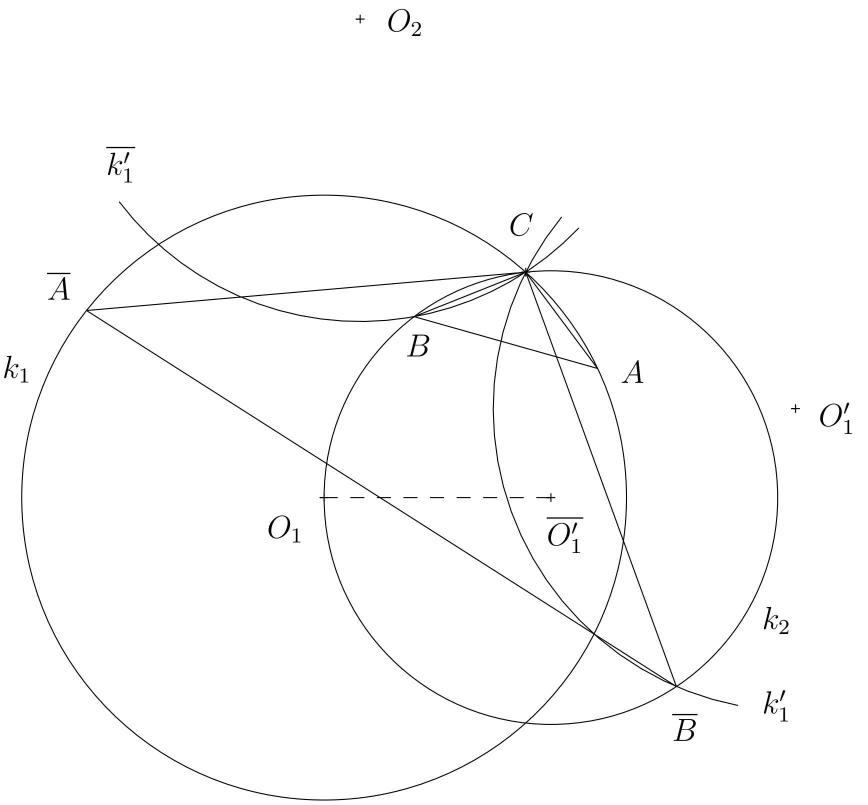


Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy určením úsečky O_1O_2 — kružnice k_1 a k_2. Pro narýsování trojúhelníka ABC uvažujme otočení $\mathcal{R}(C; \pm 105°)$. V daném otočení zobrazíme kružnici k_1 na kružnici k_1'. Jestliže $A \in k_1$, pak i $B \in k_1'$, protože se bod A v tomtéž otočení zobrazí na bod B. Bod B tak nalezneme jako průsečík kružnic k_1' a k_2. Bod A doplníme jako vzor bodu B v zobrazení $\mathcal{R}(C; \pm 105°)$.

Popis konstrukce.

0. úsečka O_1O_2, kružnice k_1, k_2, bod C
1. k_1'; $\mathcal{R}(C; \pm 105°) : k_1 \to k_1'$
2. B; $B \in k_2 \cap k_1'$
3. A; $\mathcal{R}(C; \mp 105°) : B \to A$
4. $\triangle ABC$

Konstrukce.

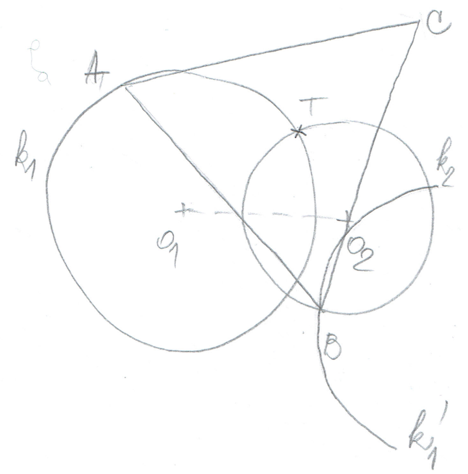


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení. Jedno získáme v otočení $\mathcal{R}(C; +105°)$ a druhé v otočení $\mathcal{R}(C; -105°)$.

Příklad 45.

Zadání. Kružnice $k_1(O_1; 4\,\text{cm})$, $k_2(O_2; 3\,\text{cm})$, $|O_1O_2| = 2\,\text{cm}$ se protínají ve dvou bodech. Označte T jeden z těchto průsečíků.

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby platilo $A \in k_1$, $B \in k_2$ a bod T byl těžiště trojúhelníku ABC.



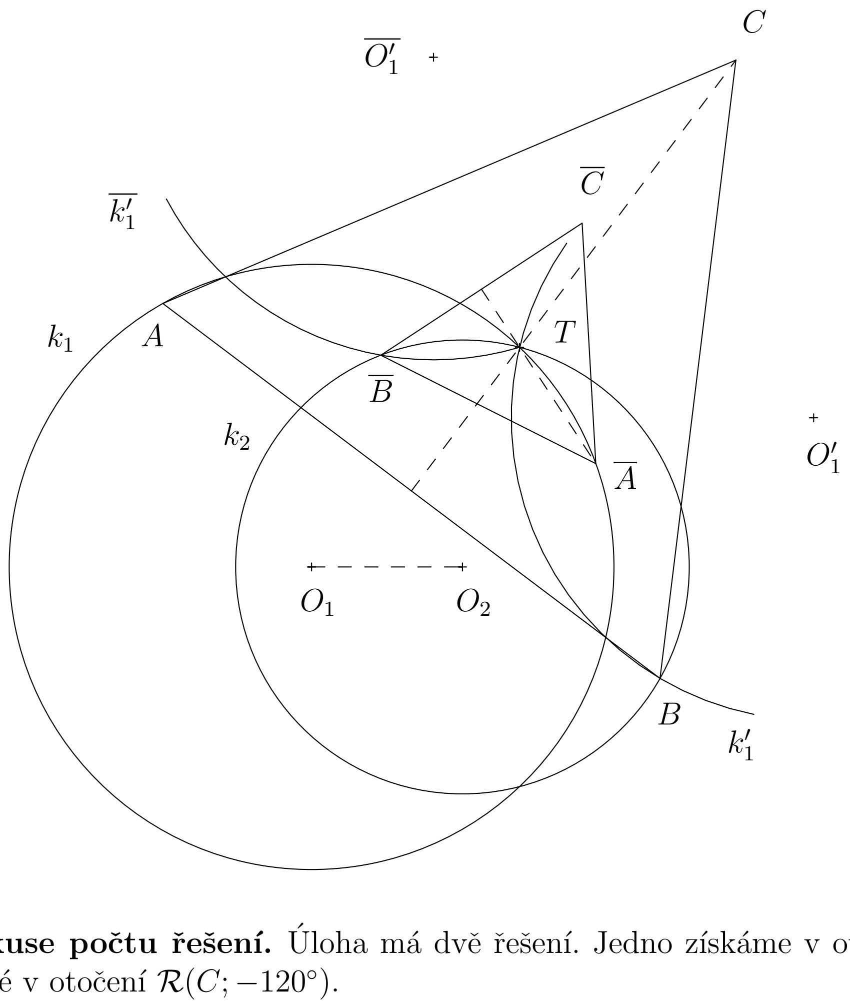
Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy určením úsečky O_1O_2 — kružnice k_1 a k_2. V rovnostranném trojúhelníku ABC splývají těžnice s osami vrcholových úhlů. Pak také platí, že trojúhelník ABT je rovnoramenný a velikost úhlu při vrcholu T je

120°. Pro narýsování trojúhelníka ABC uvažujme otočení $\mathcal{R}(T; \pm 120°)$. V daném otočení zobrazíme kružnici k_1 na kružnici k_1'. Jestliže $A \in k_1$, pak i $B \in k_1'$, protože se bod A v tomtéž otočení zobrazí na bod B. Bod B tak nalezneme jako průsečík kružnic k_1' a k_2. Bod A doplníme jako vzor bodu B v zobrazení $\mathcal{R}(T; \pm 120°)$ a bod C užitím vlastností rovnostranného trojúhelníka.

Popis konstrukce.

0. úsečka O_1O_2, kružnice k_1, k_2, bod T
1. k_1'; $\mathcal{R}(T; \pm 120°) : k_1 \rightarrow k_1'$
2. B; $B \in k_2 \cap k_1'$
3. A; $\mathcal{R}(T, \mp 120°) : B \rightarrow A$
4. $\triangle ABC$ (sss); $\triangle ABC$ je rovnostranný s vnitřním bodem T

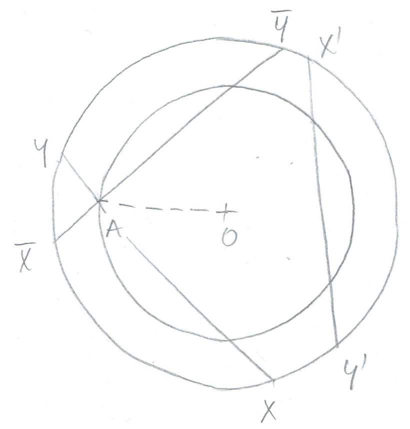
Konstrukce.



Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení. Jedno získáme v otočení $\mathcal{R}(C; +120°)$ a druhé v otočení $\mathcal{R}(C; -120°)$.

Příklad 46.

Zadání. Je dána kružnice $k(O; 4\,\text{cm})$ a bod A, $|OA| = 3\,\text{cm}$. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k, které mají délku 6 cm a pro které platí, že přímka XY prochází daným bodem A.

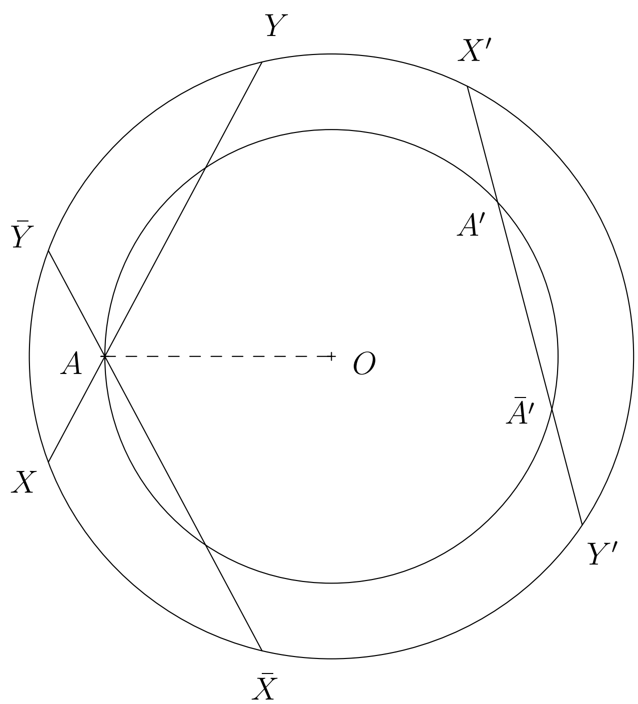


Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy — úsečku OA a kružnici k. Poté narýsujeme libovolnou tětivu $X'Y'$ kružnice k o délce 6 cm. Uvažujme otočení $\mathcal{R}(O;\sigma)$ s vhodným koeficientem σ tak, že se tětiva $X'Y'$ zobrazí na tětivu XY kružnice k a platí $A \in XY$. Sestrojíme tak kružnici a se středem O takovou, že $A \in a$. Pak nalezneme A' jako průsečík tětivy $X'Y'$ a kružnice a. V otočení $\mathcal{R}(O;\sigma)$ se pak bod X' (resp. Y') zobrazí do bodu X (resp. Y).

Popis konstrukce.

0. úsečka OA, kružnice k
1. $X'Y'$; $X' \in k \wedge Y' \in k \wedge |X'Y'| = 6\,\text{cm}$
2. a; $a(O;|OA|)$
3. A'; $A' \in a \cap X'Y'$
4. XY; $\mathcal{R}(O;\sigma) : A' \to A \wedge X'Y' \to XY$

Konstrukce.

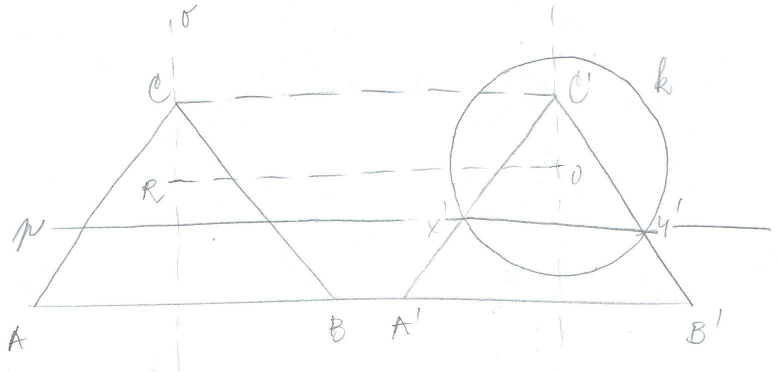


Diskuse počtu řešení. Úloha má dvě řešení, protože existují dva průsečíky tětivy $X'Y'$ s kružnicí a.

Příklad 47.

Zadání. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC ($a = 6\,\mathrm{cm}$) a kružnice $k(O; 2,5\,\mathrm{cm})$. Střed O je volen tak, aby platilo $|CO| = |BO| = 5\,\mathrm{cm}$, $k \cap \triangle ABC = \emptyset$.

Sestrojte přímku p rovnoběžnou se stranou AB tak, aby tětiva, kterou kružnice k vytíná na přímce p, byla stejná jako úsečka XY, kterou přímka p vytíná na trojúhelníku ABC, tj. $X \in p \cap AC$, $Y \in p \cap BC$.

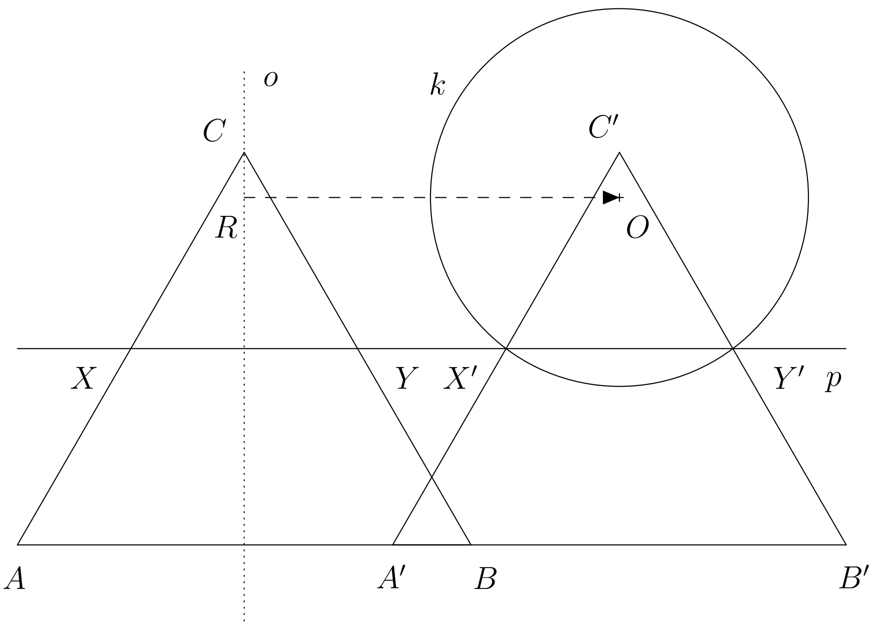


Rozbor. Nejprve narýsujeme zadání polohové úlohy — trojúhelník ABC a kružnici k daných vlastností. Uvažujme posunutí $\mathcal{T}(\vec{u})$ o vektor $\vec{u}$, který má směr úsečky AB a velikost vzdálenosti osy o úsečky AB od středu O kružnice k. V tomto zobrazení se trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$ takový, že obraz hledaného bodu X (resp. Y), tedy bod X' (resp. Y') bude průsečíkem úsečky $A'C'$ (resp. $B'C'$) a kružnice k. Obraz o' osy úsečky AB splyne s osou úsečky $A'B'$, na níž navíc leží bod O, proto jsme volili dané posunutí $\mathcal{T}$. Hledaná přímka p je přímka procházející body X', Y' a jejich vzory X, Y v zobrazení $\mathcal{T}$. Díky osové souměrnosti trojúhelníka ABC podle osy o je nalezená přímka p opravdu rovnoběžná s přímkou AB a splňuje i další body zadání.

Popis konstrukce.

0. trojúhelník ABC, kružnice k se středem O
1. o; o je osa úsečky AB R
2. R; $R \in o \wedge OR \parallel AB$
3. $A'B'C'$; $\mathcal{T}(\overrightarrow{RO}) : ABC \rightarrow A'B'C'$
4. X'; $X' \in A'C' \cap k$
5. Y'; $Y' \in B'C' \cap k$
6. X, Y; $\mathcal{T}(\overrightarrow{OR}) : X' \rightarrow X, Y' \rightarrow Y$
7. p; $p = XY$

Konstrukce.

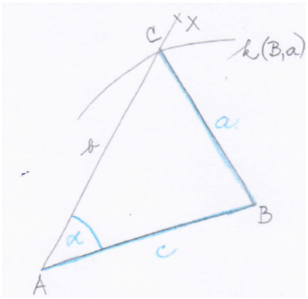


Diskuse počtu řešení. Úloha má jediné řešení.

4. Další příklady

Příklad 48

Zadání: $c = 6\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 45°$, a.

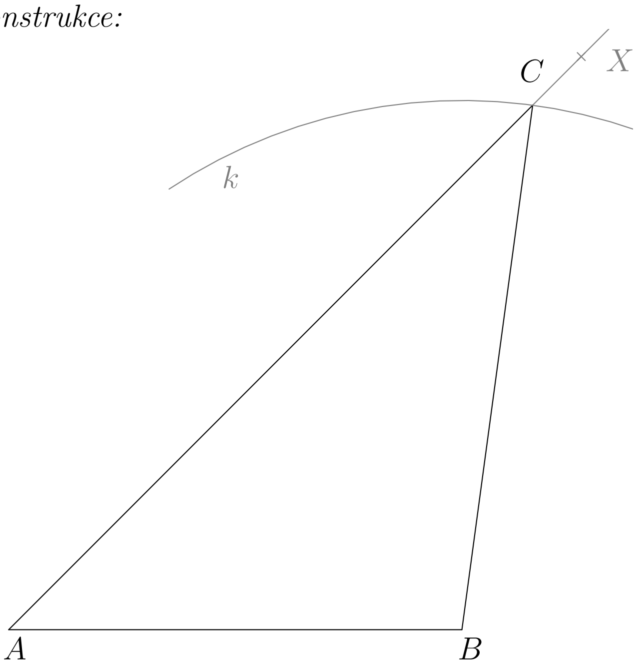


Rozbor: Nejprve umístíme úsečku AB. Vrchol C vznikne průnikem ramene úhlu BAC a kružnice k se středem ve vrcholu B a poloměrem velikosti strany a.

Postup konstrukce:

1. AB; $|AB| = c = 6\,\mathrm{cm}$
2. $\sphericalangle BAX$; $|\sphericalangle BAX| = \alpha = 45°$
3. k; $k(B; a)$
4. C; $C = k \cap \mapsto AX$
5. $\triangle ABC$

Konstrukce:

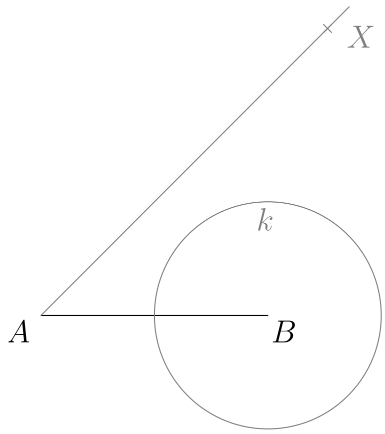


Diskuse: Počet řešení je závislý na počtu bodů v průniku polopřímky AX a kružnice k. Jediné řešení má úloha v případě dotyku k s $\mapsto AX$. AX je pak tečnou kružnice k, a tedy je úhel BCA pravý, kde s využitím goniometrických funkcí odvodíme vztah pro délku strany a:

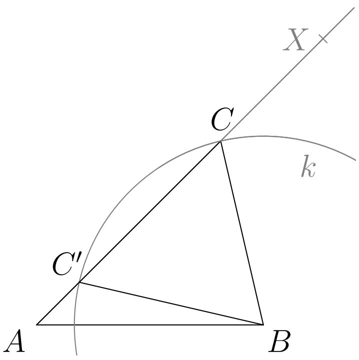
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

V případě rovnosti máme tedy jedno řešení. Je-li strana a menší než $c \cdot \sin\alpha$, pak se kružnice k s polopřímkou AX vůbec neprotnou. Je-li strana a větší než $c \cdot \sin\alpha$, pak může mít kružnice k s polopřímkou AX dva společné body za předpokladu, že poloměr kružnice je menší než 6. V případě $a = 6\,\text{cm}$ je jedním z bodů průniku polopřímky AX a kružnice k právě bod A, čímž získáváme právě jedno řešení pro konstrukci bodu C. V případě $a > 6\,\text{cm}$ získáme jediné řešení.

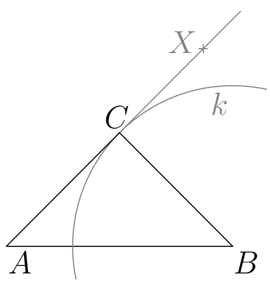
$$\begin{aligned} a = c\sin\alpha = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ nebo } a \geq 6 \ldots 1 \text{ řešení} \\ a < 3\sqrt{2} \ldots 0 \text{ řešení} \\ 3\sqrt{2} < a < 6 \ldots 2 \text{ řešení} \end{aligned}$$



$c = 3\,\text{cm}$ žádné řešení



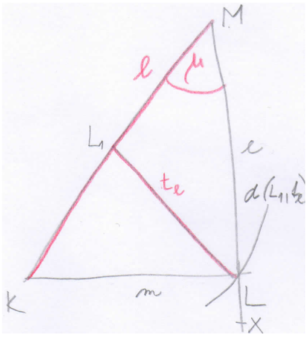
$c = 5\,\text{cm}$ dvě řešení



$c = 3\sqrt{2}$ jedno řešení

Příklad 49

Zadání: $l = 8\,\mathrm{cm}$, $\mu = 30°$, t_l.

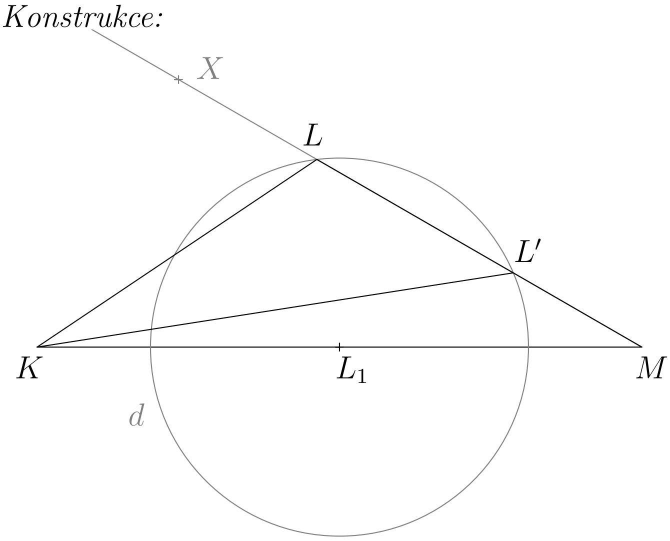


Rozbor: Umístíme úsečku KM. Těžnice je úsečka spojující vrchol a střed protější strany (v obrázku L_1). Bod L je bodem průniku ramene úhlu KLM a kružnice d se středem v bodě L_1 a poloměrem t_l.

Postup konstrukce:

1. KM; $|KM| = l = 8\,cm$
2. $\sphericalangle KMX$; $|\sphericalangle KMX| = \mu = 30°$
3. L_1; $L_1 \in KM \wedge |KL_1| = |L_1M|$
4. d; $d(L_1; t_l)$
5. L; $L = d \cap \mapsto MX$
6. $\triangle KLM$

Konstrukce:



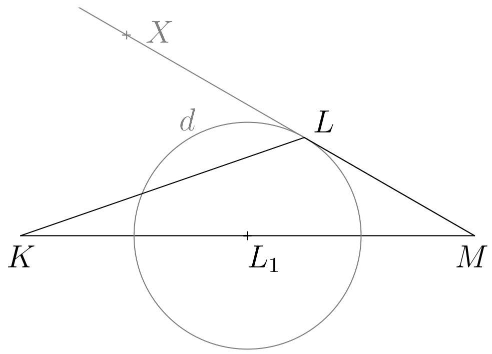
Diskuse: Počet řešení je závislý na počtu bodů v průniku polopřímky MX a kružnice d. V případě, že MX je tečna kružnice d, platí vztahy

$$\sin\mu = \frac{t_l}{\frac{l}{2}},$$

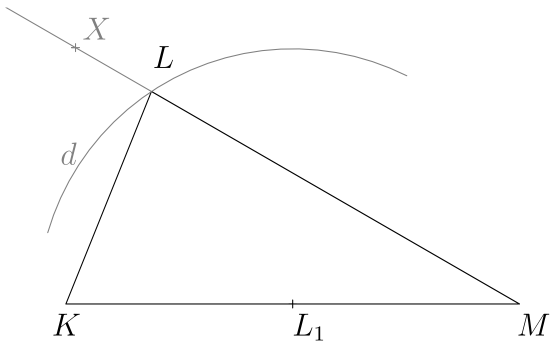
$$t_l = \frac{b}{2}\sin\mu = \frac{8}{2}\sin 30^\circ = 2.$$

V případech, kdy délka těžnice t_l je rovna 2 cm, tzn. přímka MX je tečnou kružnice d, a kdy $t_l \geq 4$, tzn. průnik kružnice d s polopřímkou MX je jednoprvkový, má úloha jediné řešení.

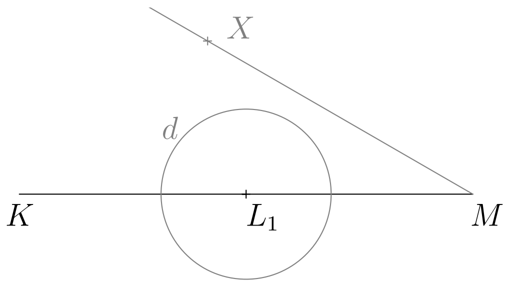
Je-li délka těžnice t_l větší než 2 cm a menší než 4 cm, pak má úloha dvě řešení, protože existují dva body L, L'. Je-li délka těžnice t_l, menší než 2 cm, úloha nemá řešení, tzn. průnik kružnice d a polopřímky MX je prázdný.



$b = 2\,\text{cm}$ tečna ke kružnici



$b = 4{,}5\,\text{cm}$ jedno řešení

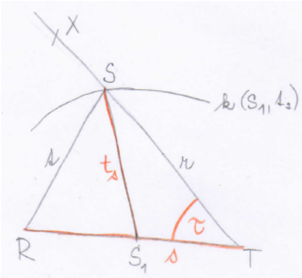


$b = 1{,}5$ žádné řešení

Příklad 50

Zadání: $s = 8\,\text{cm}$, $t_s = 2{,}5\,\text{cm}$, τ.

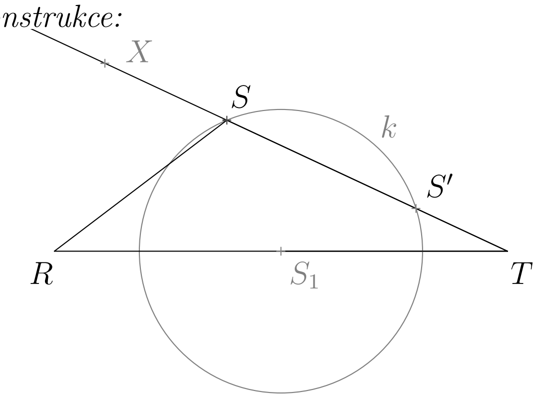
Rozbor: Umístíme úsečku RT a sestrojíme její střed S_1. Bod S pak leží na kružnici $k(S_1; t_s)$ a na rameni úhlu RTS.



Postup konstrukce:

1. RT; $|RT| = s = 8\,\mathrm{cm}$
2. S_1; $|RS_1| = |S_1T| \wedge S_1 \in RT$
3. $\sphericalangle RTX$; $|\sphericalangle RTX| = \tau$
4. k; $k(S_1; t_s = 2{,}5\,\mathrm{cm})$
5. S; $S = k \cap \mapsto TX$
6. $\triangle RST$

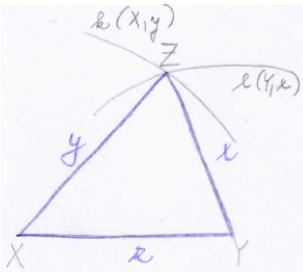
Konstrukce:



Diskuse: Je-li ST tečnou kružnice k, platí vztah $\sin\tau = \frac{2t_s}{s} = \frac{5}{8}$. Je-li $\sin\tau = \frac{5}{8}$, má úloha jediné řešení, je-li $\sin\tau < \frac{5}{8}$, má úloha dvě řešení, a pro $\sin\tau > \frac{5}{8}$ úloha nemá řešení.

Příklad 51

Zadání: $z = 6\,\mathrm{cm}$, $y = 5\,\mathrm{cm}$, x.

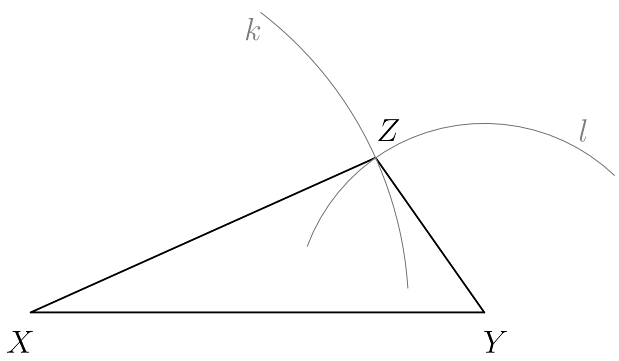


Rozbor: Trojúhelník XYZ sestrojíme podle sss. Postup známe ze základní školy.

Postup konstrukce:

1. XY; $|XY| = z = 6\,\text{cm}$
2. k; $k(X; y = 5\,\text{cm})$
3. l; $l(Y; x)$
4. Z; $Z = k \cap l$
5. $\triangle XYZ$

Konstrukce:



Diskuse: Průnik kružnic k a l můžeme mít 0, 1, 2 prvky v závislosti na trojúhelníkové nerovnosti.

$$x + y > z$$
$$x + z > y$$
$$y + z > x$$

Do soustavy nerovnic dosadíme a vyřešíme ji.

$$x + 5 > 6$$
$$x + 6 > 5$$
$$5 + 6 > x$$

Leží-li parametr x v intervalu $(1; 11)\,\text{cm}$, konstrukce trojúhelníku XYZ má řešení, a to jediné (druhé řešení je shodné a leží v opačné polorovině). Leží-li parametr mimo tento interval, trojúhelník XYZ nelze zkonstruovat, a tedy neexistuje.

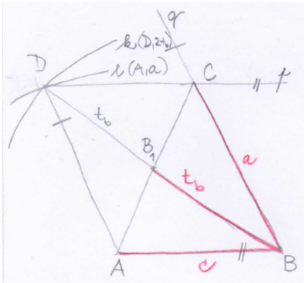
Příklad 52

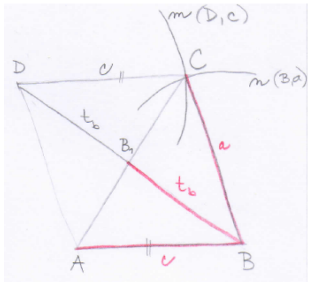
Zadání: $c = 6\,\text{cm}$, $t_b = 4\,\text{cm}$, a.

Rozbor: Úlohu řešíme tzv. doplněním na rovnoběžník, ve kterém známe délky protilehlých stran a délku jedné úhlopříčky ($2t_b = 8\,\text{cm}$). Nejprve zkonstruujeme trojúhelník ABD a posléze doplníme na rovnoběžník $ABCD$ pomocí rovnoběžek.

Úlohu lze řešit pomocí středové symetrie. Uvažujeme tedy středovou symetrii $\mathcal{S}(B_1)$: $C \to A \land B \to D$, kde B_1 je střed strany AC (a zároveň střed rovnoběžníku $ABCD$).

Postup konstrukce 1:





1. AB; $|AB| = c = 6\,\text{cm}$

2. k; $k(B; 2\cot t_b = 8\,\text{cm})$

3. l; $l(A; a)$

4. D; $D = k \cap l$

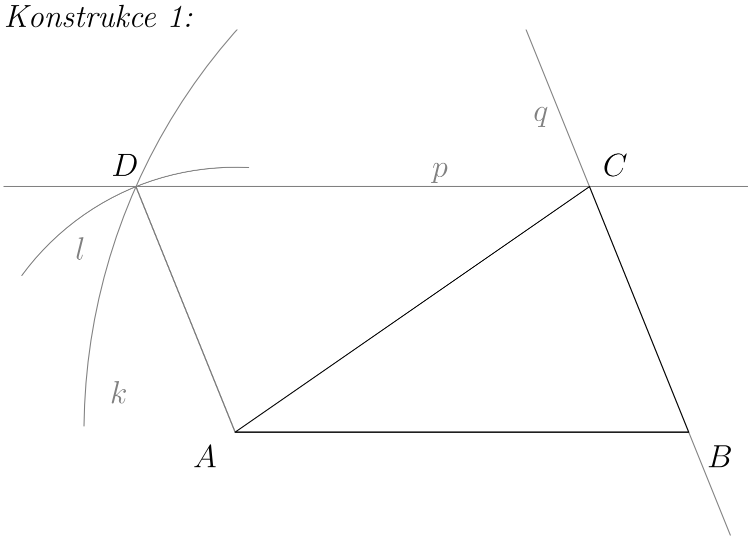
5. p; $D \in p \parallel AB$

6. q; $B \in q \parallel AD$

7. C; $C = p\ \cap\ q$

8. $\triangle ABC$

Konstrukce 1:



Postup konstrukce 2:

1. BD; $|BD| = 2t_b = 8\,\text{cm}$

2. m; $m(D; c = 6\,\text{cm})$

3. n; $n(B; a)$

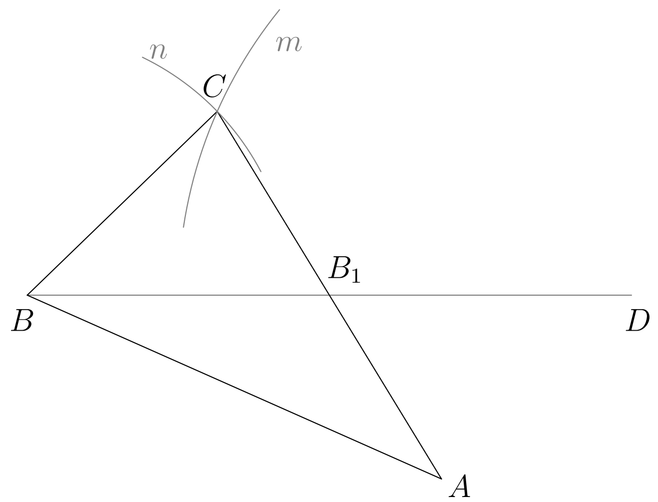
4. C; $C = m\ \cap\ n$

5. B_1; $B_1 \in BD \wedge |BB_1| = |B_1D|$

6. A; $\mathcal{S}(B_1)\colon C \to A$

7. $\triangle ABC$

Konstrukce 2:



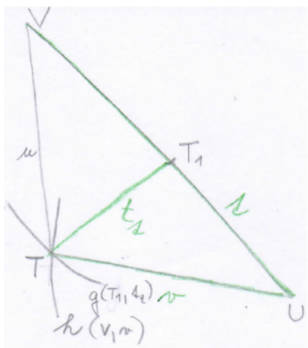
Diskuse: Počet řešení je závislý na existenci trojúhelníku ABD v prvním postupu konstrukce a trojúhelníku BDC ve druhém postupu konstrukce. Z trojúhelníkové nerovnosti získáme vztahy pro a.

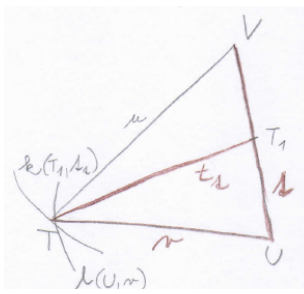
$$a + 6 > 8$$
$$a + 8 > 6$$
$$8 + 6 > a$$

Pro $a \in (2, 14)$ cm máme právě jedno řešení. Jinak trojúhelník neexistuje.

Příklad 53

Zadání: $t = 5\,\mathrm{cm}$, $t_t = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, v.





Rozbor: Umístíme úsečku UV. Najdeme její střed, který označíme T_1. Bod T leží v průniku kružnic $g(T_1; t_t)$ a $h(V; v)$.

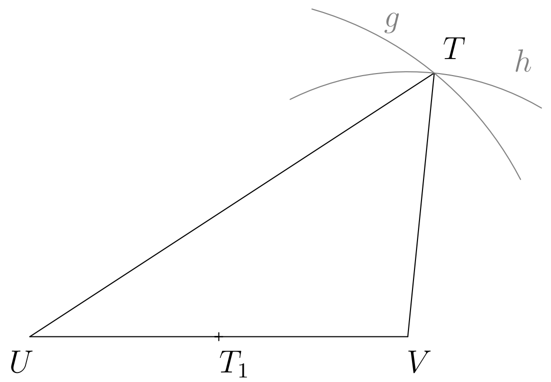
Úlohu lze řešit pomocí středové symetrie. Nejprve sestrojíme trojúhelník T_1TU podle sss. Dále uvažujeme středovou symetrii $\mathcal{S}(T_1) : U \to V$.

Postup konstrukce 1:

1. UV; $|UV| = t = 5\,\mathrm{cm}$
2. T_1; $T_1 \in UV \wedge |UT_1| = |T_1V|$

3. g; $g(T_1; t_t = 4{,}5\,\mathrm{cm})$
4. h; $h(V; v)$
5. T; $T = g \cap h$
6. $\triangle TUV$

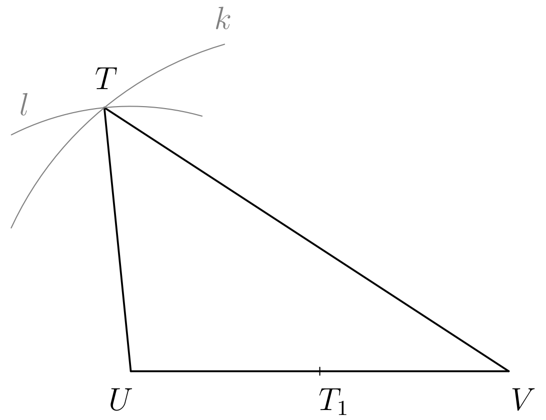
Konstrukce 1:



Postup konstrukce 2:

1. UT_1; $|UT_1| = \frac{t}{2} = \frac{5}{2}\,\mathrm{cm}$
2. k; $k(T_1; t_t = 4{,}5\,\mathrm{cm})$
3. l; $l(U; v)$
4. T; $T = k \cap l$
5. V; $\mathcal{S}(T_1)\colon U \to V$
6. $\triangle TUV$

Konstrukce 2:



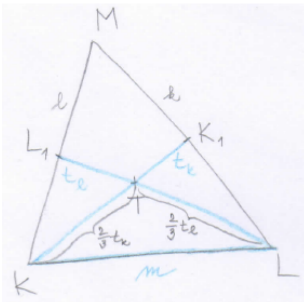
Diskuse: Počet řešení závisí na existenci trojúhelníka TUT_1. Z trojúhelníkové nerovnosti tedy plynou vztahy pro délku strany v:

$$2{,}5 + 4{,}5 > v$$
$$v + 2{,}5 > 4{,}5$$
$$4{,}5 + v > 2{,}5$$

Pro $v \in (2,7)$ cm má úloha jedno řešení (druhé řešení je shodné a leží v opačné polorovině). Jinak trojúhelník TUV neexistuje.

Příklad 54

Zadání: $m = 5\,\text{cm}$, $t_k = 6\,\text{cm}$, t_l.

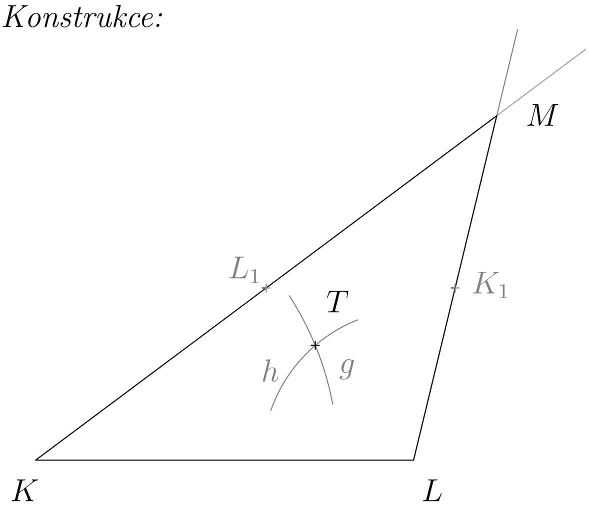


Rozbor: Nejprve zkonstruujeme trojúhelník KLT. Těžiště dělí těžnici v poměru $2:1$, proto uvažujeme stejnolehlost s koeficientem $\frac{1}{2}$ a středem T, ve které se zobrazí body $K \to K_1$ a $L \to L_1$. Bod M leží v průniku polopřímek LK_1 a KL_1.

Postup konstrukce:

1. KL; $|KL| = m = 5\,\text{cm}$
2. g; $g(K; r = \frac{2}{3}t_k = 4\,\text{cm})$
3. h; $h(L; r = \frac{2}{3}t_l)$
4. T; $T = g \cap h$
5. K_1; $\mathcal{H}(T, \frac{1}{2})$: $K \to K_1$
6. L_1; $\mathcal{H}(T, \frac{1}{2})$: $L \to L_1$
7. M; $M = \mapsto KL_1 \cap \mapsto LK_1$
8. $\triangle KLM$

Konstrukce:



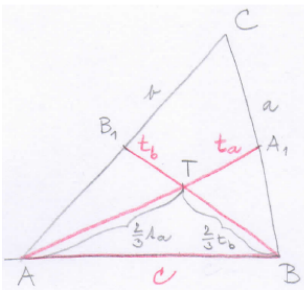
Diskuse: Počet řešení závisí na existenci trojúhelníku KLT. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývají vztahy pro t_l.

$$4 + \frac{2}{3}t_l > 5$$
$$\frac{2}{3}t_l + 5 > 4$$
$$4 + 5 > \frac{2}{3}t_l$$

Pro $t_l \in (\frac{3}{2}, \frac{27}{2})$ cm má úloha jedno řešení (druhé řešení je shodné a leží v opačné polorovině). Jinak úloha nemá žádná řešení.

Příklad 55

Zadání: $t_a = 6\,\text{cm}$, $t_b = 3\,\text{cm}$, c.

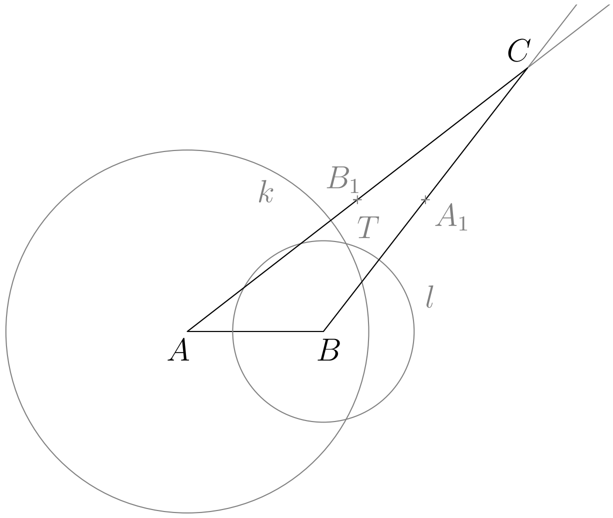


Rozbor: Nejprve zkonstruujeme trojúhelník ABT. Těžiště dělí těžnici v poměru $2:1$, proto uvažujeme stejnolehlost s koeficientem $\frac{1}{2}$ a středem T, ve které se zobrazí body $A \to A_1$ a $B \to B_1$. Bod C leží v průniku polopřímek AB_1 a BA_1.

Postup konstrukce:

1. AB; $|AB| = c$
2. k; $k(A; r = \frac{2}{3}t_a = 4\,\text{cm})$
3. l; $l(B; r = \frac{2}{3}t_b = 2\,\text{cm})$
4. T; $T = k \cap l$
5. A_1; $\mathcal{H}(T, \frac{1}{2})$: $A \to A_1$
6. B_1; $\mathcal{H}(T, \frac{1}{2})$: $B \to B_1$
7. C; $C = \mapsto AB_1 \cap \mapsto BA_1$
8. $\triangle ABC$

Konstrukce:



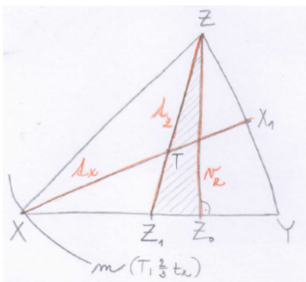
Diskuse: Počet řešení závisí na existenci trojúhelníku ABT. Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývají vztahy pro c.

$$4 + 2 > c$$
$$c + 2 > 4$$
$$c + 4 > 2$$

Pro $c \in (2, 6)$ cm má úloha jedno řešení (druhé řešení je shodné a leží v opačné polorovině). Jinak úloha nemá žádná řešení.

Příklad 56

Zadání: $t_z = 4\,\mathrm{cm}$, $t_x = 6\,\mathrm{cm}$, v_z.



Rozbor: Uvažujeme trojúhelník Z_1Z_0Z, kde velikost $|Z_1Z| = t_z$, $|Z_0Z| = v_z$ a úhel Z_1Z_0Z je pravý. Najdeme bod T, protože víme, že těžiště dělí těžnici v poměru $2 : 1$. Bod X získáme jako průsečík kružnice $m(T; \frac{2}{3}t_x)$ s přímkou Z_0Z_1. Bod Y pak leží na polopřímce ZX_1, kde X_1 je homotetickým obrazem bodu X v homotetii $\mathcal{H}(T, \frac{1}{2})$, s přímkou Z_0Z_1.

Postup konstrukce:

1. $\triangle Z_0Z_1Z$; podle Ssu: $|Z_1Z| = t_z = 4\,\mathrm{cm}$, $|Z_0Z| = v_z$ a $|\sphericalangle Z_1Z_0Z| = 90°$
2. T; $2|TZ_1| = |TZ| \wedge T \in Z_1Z$
3. m; $m(T; r = \frac{2}{3}t_x = 4\,\mathrm{cm})$

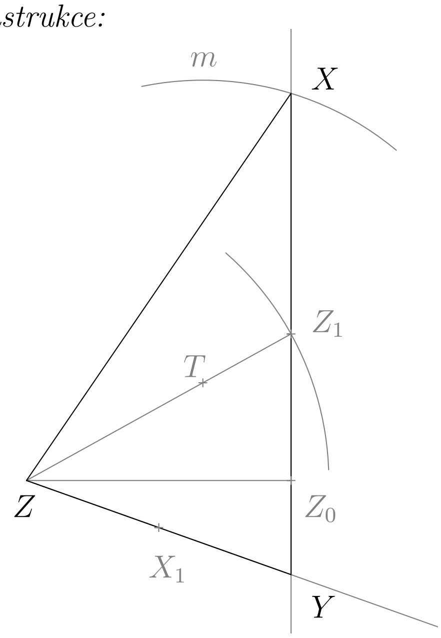
4. X; $X = m \cap \leftrightarrow Z_0Z_1$

5. X_1; $\mathcal{H}(T, \frac{1}{2})$: $Z \to Z_1$

6. Y; $Y = \mapsto ZX_1 \cap \leftrightarrow Z_0Z_1$

7. $\triangle XYZ$

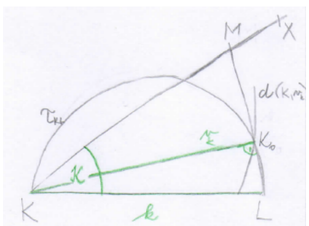
Konstrukce:



Diskuse: Počet řešení závisí na počtu průsečíků kružnice m a přímky Z_1Z_0. Je-li $v_z <$ $< 4\,\mathrm{cm}$, má úloha 2 řešení, je-li $v_z = 4\,\mathrm{cm}$, má úloha 1 řešení, pro $v_z > 4\,\mathrm{cm}$ úloha nemá řešení.

Příklad 57

Zadání: $m = 7\,\mathrm{cm}$, $\kappa = 30°$, v_k.



Rozbor: Umístíme úsečku KL. Pro konstrukci bodu M nejprve zkonstruujeme bod K_0 – patu výšky v_k. Bod K_0 leží na Thaletově kružnici nad KL a ve vzdálenosti v_k od bodu K. Bod M je pak průsečíkem přímky LK_0 a ramene úhlu LKM.

Postup konstrukce:

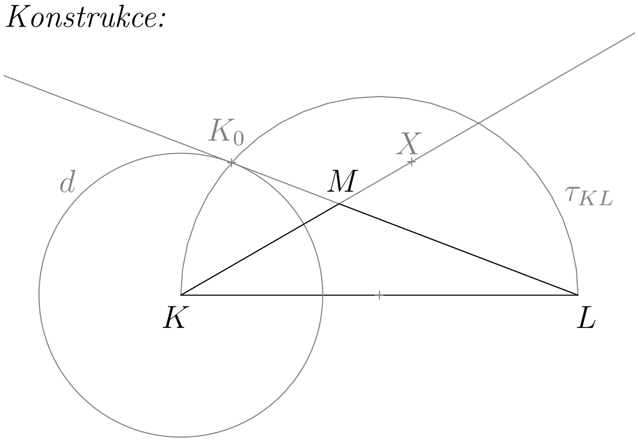
1. KL; $|KL| = m = 7\,\mathrm{cm}$

2. τ_{KL}

3. d; $d(K; v_k)$

4. K_0; $K_0 = d \cap \tau_{KL}$
5. $\sphericalangle LKX$; $|\sphericalangle LKX| = \kappa = 30°$
6. M; $M = \mapsto KX \cap \leftrightarrow LK_0$
7. KLM

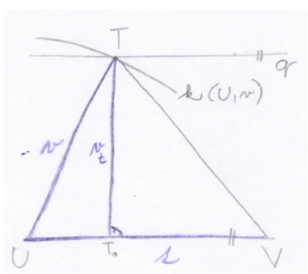
Konstrukce:

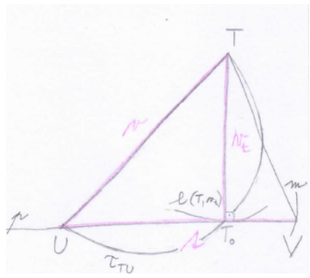


Diskuse: Počet řešení závisí na průniku kružnic d a τ_{KL}. Zřejmě pro $v_k = 7\,\text{cm}$ existuje jediné řešení $\triangle KLM$ (v opačné polorovině leží shodné řešení). Pro $v_k > 7\,\text{cm}$ bod K_0 neexistuje, a tedy úloha nemá řešení. Pro $v_k < 7\,\text{cm}$ existují dva body K_0, které při vynesení úhlu LKM v jedné polorovině dají dvě různá řešení (symetrická řešení vzniknou vynesením úhlu do opačné poloroviny).

Příklad 58

Zadání: $v = 5\,\text{cm}$, $t = 6\,\text{cm}$, v_t.





Rozbor: Trojúhelník TUV vepíšeme do pásu rovnoběžek. Nejprve umístíme úsečku UV, sestrojíme rovnoběžku q ve vzdálenosti v_t od UV. Bod T leží na sestrojené přímce q a na kružnici k se středem v bodě U a poloměrem v.

Rozbor 2: Nejprve umístíme úsečku TU, nad ní sestrojíme Thaletovu kružnici a ve vzdálenosti v_t od bodu T leží na Thaletově kružnici bod T_0. Dále sestrojíme přímku p, která je kolmá na TT_0 a prochází bodem T_0. Bod V leží na přímce p ve vzdálenosti t od vrcholu U.

Postup konstrukce 1:

1. UV; $|UV| = t = 6\,\text{cm}$

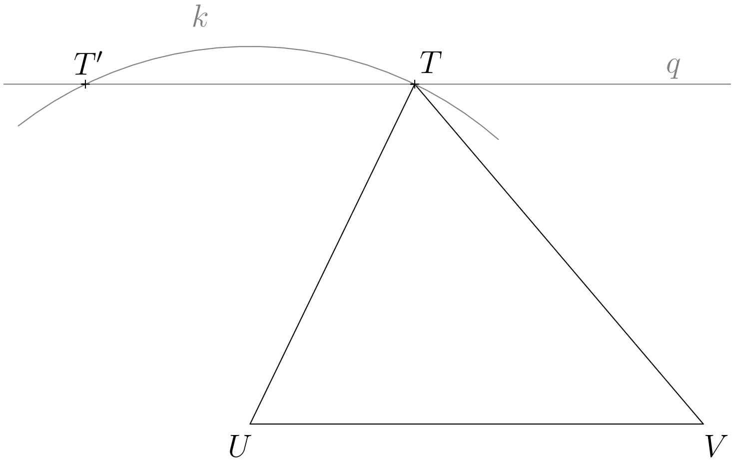
2. q; $q \parallel UV \wedge |q; UV| = v_t$

3. k; $k(U; v = 5\,\mathrm{cm})$

4. T; $T = q \cap k$

5. $\triangle TUV$

Konstrukce 1:



Postup konstrukce 2:

1. TU; $|TU| = v = 5\,\mathrm{cm}$

2. τ_{TU}

3. l; $l(T; v_t)$

4. T_0; $T_0 = l \cap \tau_{TU}$

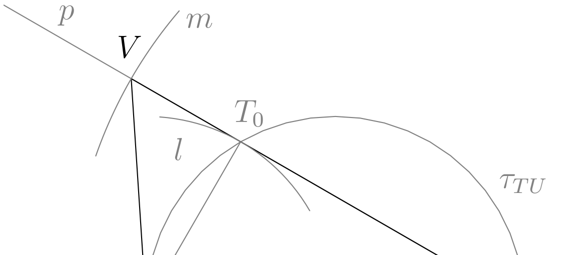
5. p; $T_0 \in p \wedge p \perp TT_0$

6. m; $m(U; t = 6\,\mathrm{cm})$

7. V; $V = m \cap p$

8. $\triangle TUV$

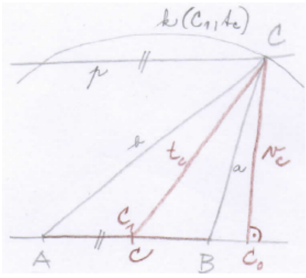
Konstrukce 2:



Diskuse: Počet řešení je v prvním případě závislý na průniku kružnice k a přímky q. V druhém případě počet řešení závisí na průniku kružnic l a τ_{TU}. Je-li $v_t = 5\,\mathrm{cm}$, má úloha jedno řešení, je-li $v_t < 5\,\text{cm}$, má úloha dvě řešení, a pro $v_t > 5\,\text{cm}$ úloha žádné řešení nemá.

Příklad 59

Zadání: $c = 4\,\text{cm}$, $v_c = 3\,\text{cm}$, t_c.

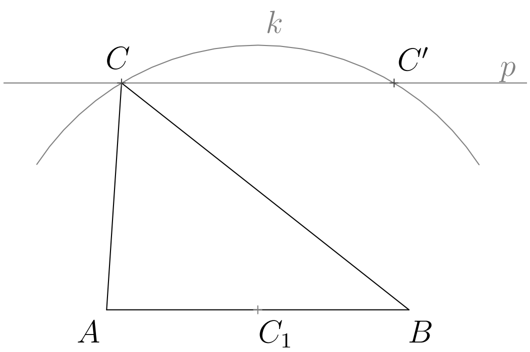


Rozbor: Trojúhelník ABC vepíšeme do pásu rovnoběžek širového v_c. Nejprve umístíme úsečku AB, sestrojíme její střed C_1 a ve vzdálenosti v_c sestrojíme rovnoběžnou přímku p. Sestrojíme kružnici k se středem v bodě C_1 a poloměrem t_c. V průniku kružnice k a přímky p leží vrchol C.

Postup konstrukce:

1. AB; $|AB| = c = 4\,\text{cm}$
2. p; $p \parallel AB \wedge |p; AB| = v_c = 3\,\text{cm}$
3. C_1; $C_1 \in AB \wedge |AC_1| = |C_1B|$
4. k; $k(C_1; t_c)$
5. C; $C \in k \cap p$
6. $\triangle ABC$

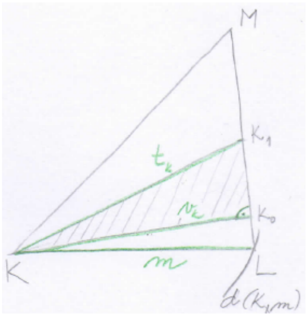
Konstrukce:



Diskuse: Počet řešení závisí na průniku kružnice k a přímky p, tedy pro $t_c > 3\,\text{cm}$ má úloha dvě řešení, pro $t_c = 3\,\text{cm}$ jedno řešení a pro $t_c < 3\,\text{cm}$ žádné řešení.

Příklad 60

Zadání: $v_k = 3\,\text{cm}$, $t_k = 3{,}5\,\text{cm}$, m.



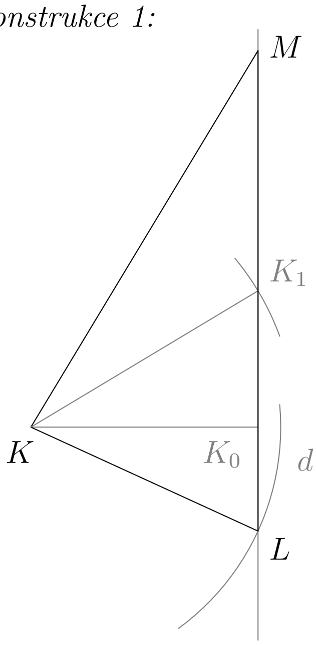
Rozbor: Sestrojíme trojúhelník KK_1K_0 podle Ssu. V prodloužení strany K_0K_1 pak ve vzdálenosti m od bodu K leží bod L. Dále uvažujeme středovou symetrii $\mathcal{S}(K_1)\colon L \to M$.

Rozbor 2: Nejprve umístíme výšku KK_0. Sestrojíme přímku p kolmou na KK_0 procházející bodem K_0, na ní najdeme body L a K_1: L ve vzdálenosti m a K_1 ve vzdálenosti t_k od bodu K. Uvažujeme středovou symetrii se středem v bodě K_1, ve které přejde bod L do bodu M.

Postup konstrukce 1:

1. $\triangle KK_1K_0$; podle Ssu: $|KK_1| = t_k = 3{,}5\,\text{cm}, |KK_0| = v_k = 3\,\text{cm}, |\sphericalangle KK_0K_1| = 90°$
2. d; $d(K; m)$
3. L; $L = d \cap \leftrightarrow K_0K_1$
4. M; $\mathcal{S}(K_1)\colon L \to M$
5. $\triangle KLM$

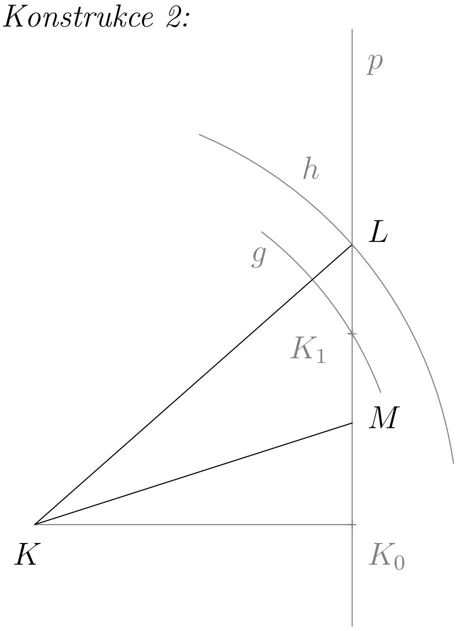
Konstrukce 1:



Postup konstrukce 2:

1. KK_0; $|KK_0| = v_k 3\,\mathrm{cm}$
2. p; $K_0 \in p \wedge p \perp KK_0$
3. g; $g(K; t_c = 3{,}5\,\mathrm{cm})$
4. K_1; $K_1 = p \cap g$
5. h; $h(K; m)$
6. L; $L = p \cap h$
7. M; $\mathcal{S}(K_1)\colon L \to M$
8. $\triangle KLM$

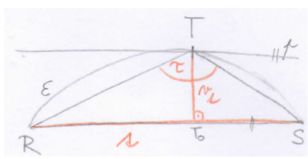
Konstrukce 2:



Diskuse: Podle počtu bodů v průniku přímky K_0K_1 a kružnice d má úloha 0, 1 nebo 2 řešení. Druhý postup dá až čtyři řešení (závisející na $p \cap g$ a $p \cap h$), která jsou však po dvou osově symetrická (s osou KK_0).

Příklad 61

Zadání: $t = 8\,\mathrm{cm}$, $\tau = 120°$, v_t.



Rozbor: Nejprve umístíme úsečku RS. Bod T leží ve vzdálenosti v_t od této úsečky, tedy na rovnoběžce v dané vzdálenosti, a na ekvigonále 120° nad RS.

Postup konstrukce:

1. RS; $|RS| = t = 8\,\mathrm{cm}$

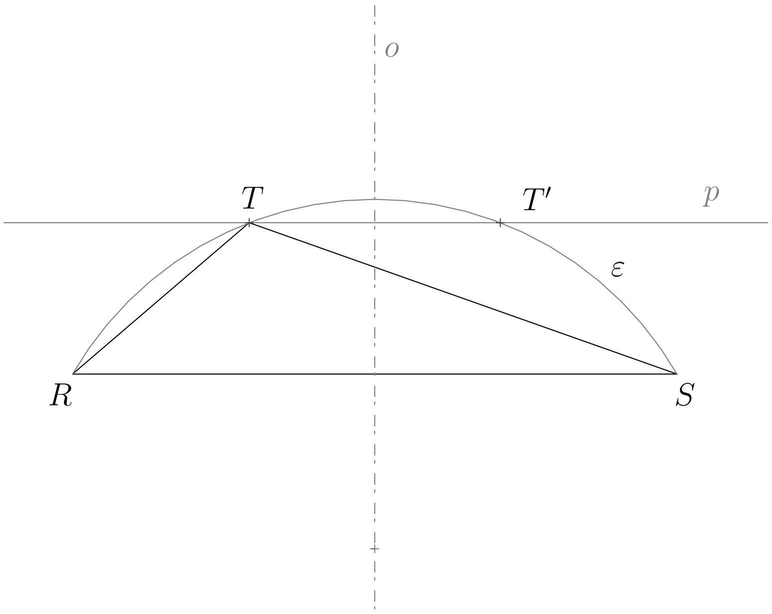
2. ε; $\varepsilon(RS; \tau = 120°)$

3. p; $p \parallel RS \wedge |p; RS| = v_t$

4. T; $T = p \cap \varepsilon$

5. $\triangle RST$

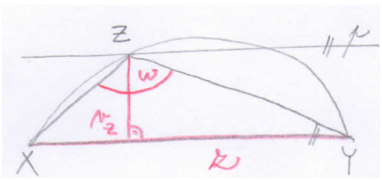
Konstrukce:



Diskuse: Počet řešení je 0, 1, 2 podle počtu bodů v průniku ekvigonály ε s přímkou p.

Příklad 62

Zadání: $v_z = 1{,}5\,\text{cm}$, $\omega = 120°$, z.



Rozbor: Nejprve umístíme úsečku XY. Bod Z leží ve vzdálenosti v_z od této úsečky, tedy na rovnoběžce v dané vzdálenosti, a na ekvigonále 120° nad XZ.

Postup konstrukce:

1. XY; $|XY| = z$

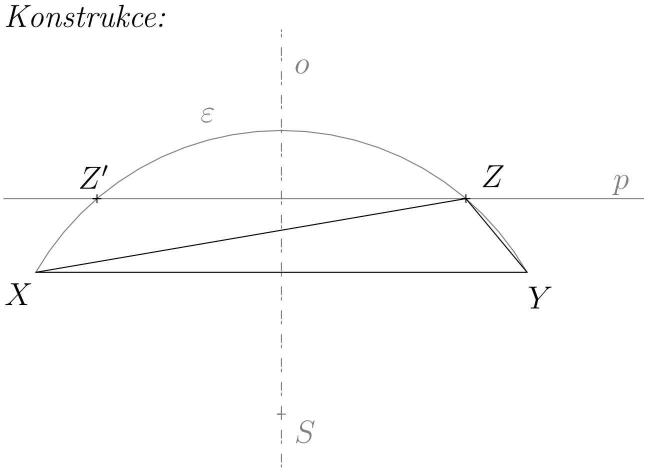
2. ε; $\varepsilon(XY; \omega = 120°)$

3. p; $p \parallel XY \wedge |p; XY| = v_z = 1{,}5\,\text{cm}$

4. Z; $Z = p \cap \varepsilon$

5. $\triangle XYZ$

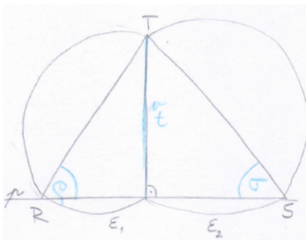
Konstrukce:

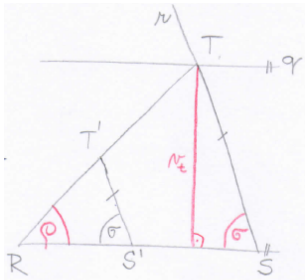


Diskuse: Počet řešení je 0, 1, 2 podle počtu bodů v průniku ekvigonály ε s přímkou p.

Příklad 63

Zadání: $\varrho = 60°$, $\sigma = 45°$, v_t.





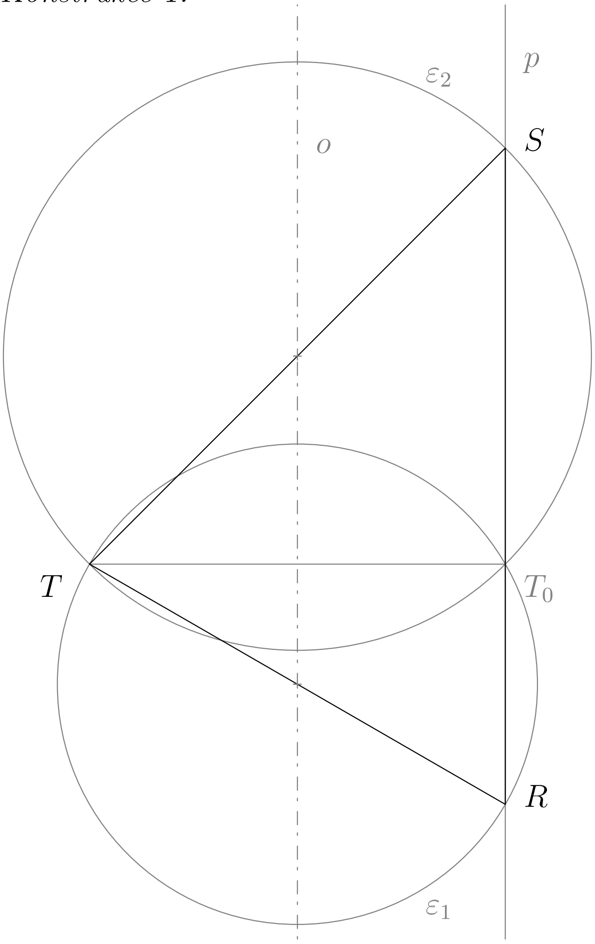
Rozbor: Umístíme výšku TT_0, dále sestrojíme kolmici p procházenící bodem T_0. Body R a S leží na ekvigonálách po řadě $\varepsilon_{60°}, \varepsilon_{45°}$ (dále značeno $\varepsilon_1, \varepsilon_2$). (Vždy uvažujeme ekvigonály v opačných polorovinách.)

Rozbor 2: Uvažujeme podobný trojúhelník $RS'T'$ podle uu. Poté uvažujeme stejnolehlost s kladným koeficientem a středem v bodě R, ve které $\triangle RS'T' \to \triangle RST$.

Postup konstrukce 1:

1. TT_0; $|TT_0| = v_t$
2. p; $T_0 \in p \wedge p \perp v_t$
3. ε_1; $\varepsilon_1 = (TT_0; \varrho = 60°)$
4. ε_2; $\varepsilon_2 = (TT_0; \sigma = 45°)$
5. R; $R = \varepsilon_1 \cap p$
6. S; $S = \varepsilon_2 \cap p$
7. $\triangle RST$

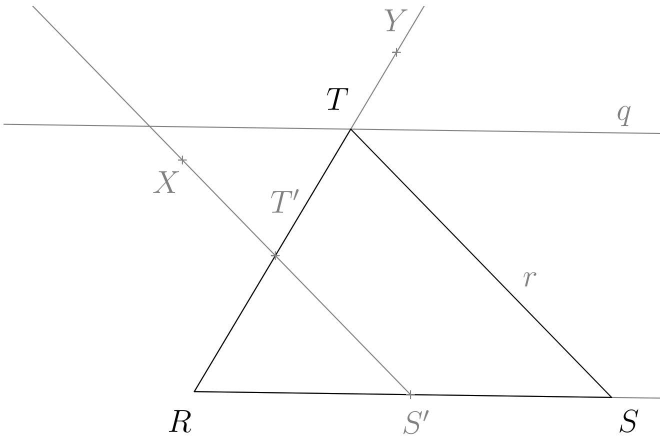
Konstrukce 1:



Postup konstrukce 2:

1. $\triangle RS'T'$; podle věty *usu*: $|RS'| = \text{lib.}, |\sphericalangle T'RS'| = \varrho = 60°, |\sphericalangle RS'T'| = \sigma = 45°$
2. q; $q \parallel RS' \wedge |q; RS'| = v_t$
3. T; $T = q \cap \mapsto RT'$
4. r, $T \in r \wedge r \parallel T'S'$
5. S; $S = r \cap \mapsto RS'$
6. $\triangle RST$

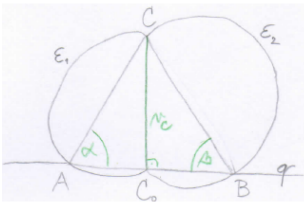
Konstrukce 2:

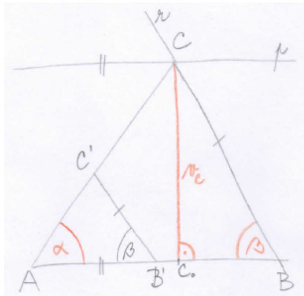


Rozbor: Úloha má jedno řešení pro každé $v_t > 0$.

Příklad 64

Zadání: $v_c = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 60°$, β.





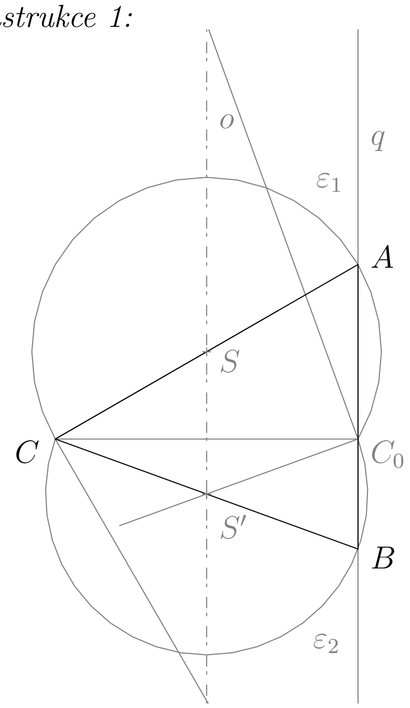
Rozbor: Umístíme výšku CC_0, dále sestrojíme kolmici q procházející bodem C_0. Body A a B leží na ekvigonálách po řadě $\varepsilon_{60°}, \varepsilon_\beta$ (dále značeno $\varepsilon_1, \varepsilon_2$). (Vždy uvažujeme ekvigonály v opačných polorovinách.)

Rozbor 2: Uvažujeme podobný trojúhelník $AB'C'$ podle uu. Poté uvažujeme stejnolehlost s kladným koeficientem a středem v bodě A, ve které $\triangle AB'C' \to \triangle ABC$.

Postup konstrukce 1:

1. CC_0; $|CC_0| = v_c = 4\,\text{cm}$
2. q; $C_0 \in q \wedge q \perp CC_0$
3. ε_1; $\varepsilon_1 = (CC_0; \alpha = 60°)$
4. ε_2; $\varepsilon_2 = (TT_0; \beta)$
5. A; $A = \varepsilon_1 \cap q$
6. B; $B = \varepsilon_2 \cap q$
7. $\triangle ABC$

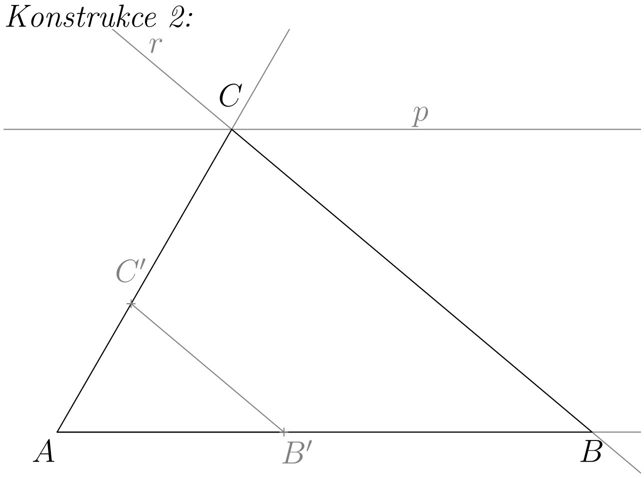
Konstrukce 1:



Postup konstrukce 2:

1. $\triangle AB'C'$; podle věty *usu*: $|AB'| = \text{lib.}, |\sphericalangle B'AC'| = \alpha = 60°, |\sphericalangle AB'C'| = \beta$
2. p; $p \parallel AB' \wedge |p; AB'| = v_c = 4\,\text{cm}$
3. C; $C = p \cap \mapsto AC'$
4. r, $C \in r \wedge r \parallel B'C'$
5. B; $B = r \cap \mapsto AB'$
6. $\triangle ABC$

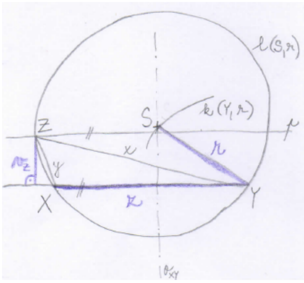
Konstrukce 2:



Diskuse: Úloha má jedno řešení pro $\beta < 90°$, jinak řešení nemá.

Příklad 65

Zadání: $z = 7\,\mathrm{cm}$, $v_z = 2\,\mathrm{cm}$, r.

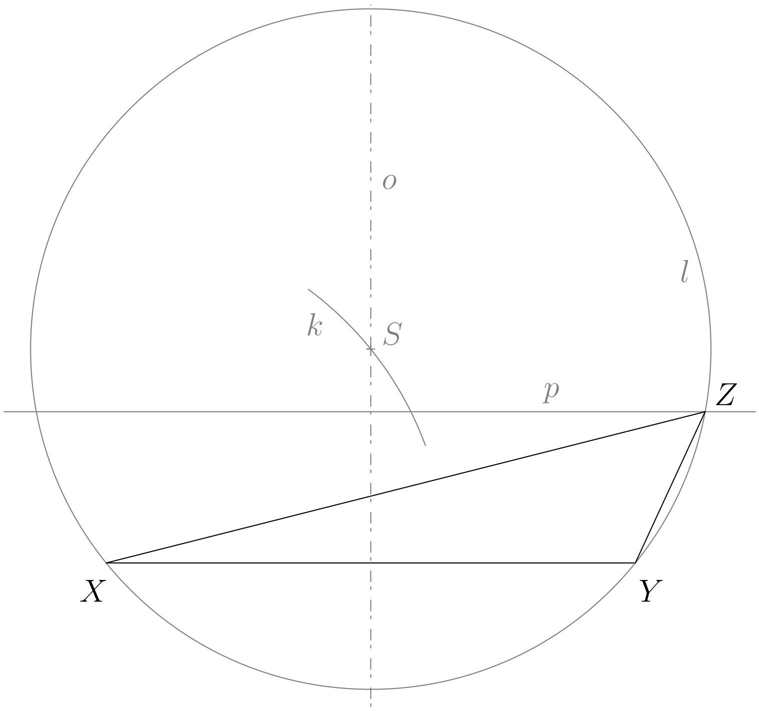


Rozbor: Umístíme úsečku XY. Střed kružnice opsané trojúhelníku leží v průsečíku os stran, a tedy střed kružnice opsané trojúhelníku XYZ leží na ose úsečky XY ve vzdálenosti r, např. od bodu X. Bod Z leží ve vzdálenosti v_z od úsečky XY a na kružnici opsané trojúhleníku $l(S;r)$.

Postup konstrukce:

1. XY; $|XY| = z = 7\,\mathrm{cm}$
2. o; o je osa úsečky XY
3. p; $p \parallel XY \wedge |p; XY| = v_z = 2\,\mathrm{cm}$
4. k; $k(X; r)$
5. S; $S = p \cap l$
6. l; $l(S; r)$
7. Z; $Z = p \cap k$
8. $\triangle XYZ$

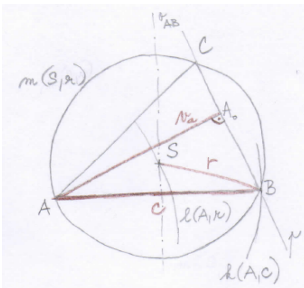
Konstrukce:

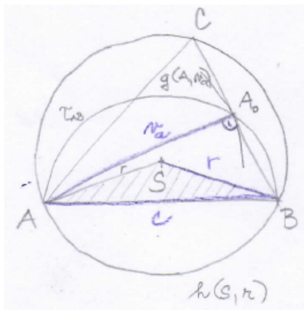


Diskuse: Počet řešení závisí 1. na existenci bodu S, 2. na průniku $l \cap p$. Z první podmínky vyplývá, že $r \geq 3{,}5\,\mathrm{cm}$, a za tohoto předpokladu má úloha 1 nebo 2 řešení.

Příklad 66

Zadání: $c = 7\,\mathrm{cm}$, $r = 4\,\mathrm{cm}$, v_a.





Rozbor: Umístíme výšku AA_0 a sestrojíme kolmici p v bodě A_0. Bod B leží ve vzdálenosti c od bodu A a na kolmici p. Dále sestrojíme kružnici opsanou trojúhelníku ABC, jejíž střed leží na ose úsečky AB a ve vzdálenosti r od B. Bod C leží na kružnici $m(S; r)$ a na přímce BA_0.

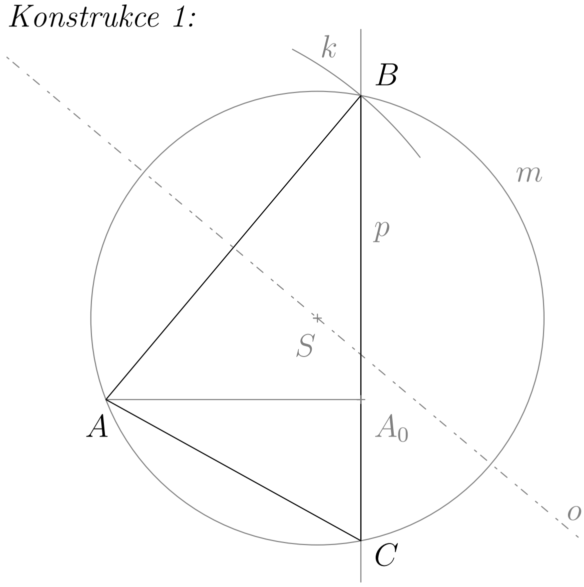
Uvažujme trojúhelník ABS podle *sss*. Pro sestrojení bodu C potřebujeme sestrojit nejprve bod A_0, který je ve vzdálenosti v_a od bodu A a na Thaletově kružnici nad AB. Bod C leží v průsečíku kružnice $h(S; r)$ a přímky A_0B.

Postup konstrukce 1:

1. AA_0; $|AA_0| = v_a$
2. p; $A_0 \in p \wedge p \perp AA_0$
3. k; $k(A, c = 7\,\mathrm{cm})$

4. B; $B = k \cap p$
5. o; o je osa úsečky AB
6. l; $l(A; r = 4\,\mathrm{cm})$
7. S; $S = l \cap o$
8. m; $m(S; r = 4\,\mathrm{cm})$
9. C; $C = m \cap \leftrightarrow A_0B$
10. $\triangle ABC$

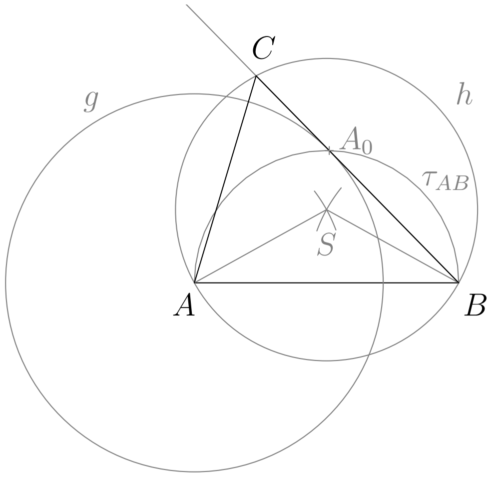
Konstrukce 1:



Postup konstrukce 2:

1. $\triangle ABS$; podle sss: $|AB| = c = 7\,\mathrm{cm}, |AS| = |BS| = r = 4\,\mathrm{cm}$
2. τ_{AB}
3. g; $g(A; v_a)$
4. A_0; $A_0 = d \cap \tau_{AB}$
5. h; $h(S; r = 4\,\mathrm{cm})$
6. C; $C = h \cap \mapsto BA_0$
7. $\triangle ABC$

Konstrukce 2:



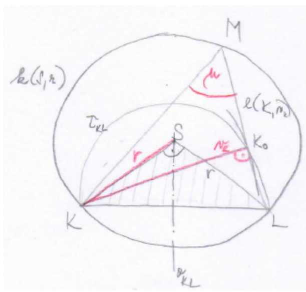
Diskuse: Podle počtu průsečíků přímky p a kružnice k dostáváme vztahy pro výšku v_a:

$$v_a = c = 7\,\text{cm} \Rightarrow A_0 = B \ldots 1 \text{ řešení}$$
$$v_a > 7\,\text{cm} \Rightarrow \text{bod } B \text{ neexistuje} \ldots\ 0 \text{ řešení}$$
$$v_a < 7\,\text{cm} \Rightarrow B, B' \ldots 2 \text{ řešení}$$

Podle počtu průsečíků g a τ_{AB} existuje 0, 1, 2 bodů A_0, které nám dají 0, 1, 2 řešení.

Příklad 67

Zadání: $\mu = 45°$, $r = 4\,\text{cm}$, v_k.



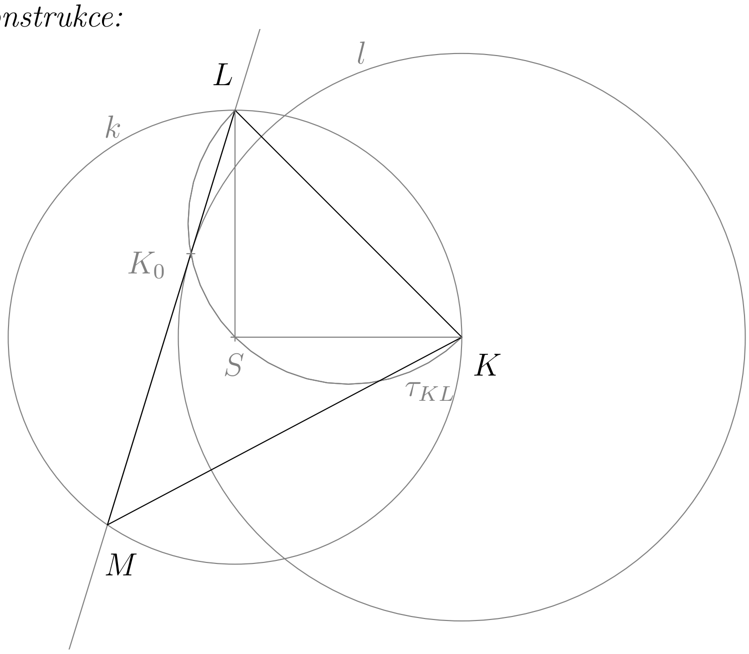
Rozbor: S využitím středových a obvodových úhlů určíme velikost úhlu $|\sphericalangle KSL| = 2 \cdot$ $\cdot\, 45° = 90°$. Sestrojíme tedy trojúhelník KSL podle *sus*. Bod M leží na kružnici $k(S; r)$ a na přímce LK_0, kde K_0 je na Thaletově kružnici nad KL a ve vzdálenosti v_k od bodu K.

Postup konstrukce:

1. $\triangle KLS$
2. τ_{KL}
3. $l; l(K; v_k)$
4. k; $k(S; r = 4\,\text{cm})$
5. K_0; $K_0 = l \cap \tau_{KL}$
6. M; $M = LK_0 \cap k$

7. $\triangle KLM$

Konstrukce:



Diskuse: Z Pythagorovy věty vyplývá, že strana m má délku $4\sqrt{2}\,\text{cm}$. Proto je-li $v_k \geq$ $\geq 4\sqrt{2}\,\text{cm}$, má úloha jedno řešení, jinak úloha řešení nemá (v závislosti na počtu průsečíků τ_{KL} a l, které vygenerují řešení v příslušném oblouku KL). Ve stejných hodnotách se pak mění řešitelnost i u druhého postupu.