Lineární programování – jaro 2013 – 1. termín

1. **(15 bodů)** Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby součet $P + Q$ polyedrů

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \} \quad \text{a} \quad Q = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = c,\ x \geq 0 \}$$

měl neprázdný průnik s P.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici F a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{ f \mid zF = a,\ z \leq 1 \}$$

je duální k úloze

$$\min \{ cx \mid yA \geq p,\ Bx = q,\ yb = dx \}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.
(x je sloupcový vektor proměnných; y je řádkový vektor proměnných; A a B jsou matice; b, c, d, p a q jsou vektory; 1 značí vektor $(1, \ldots, 1)$)

3. **(25 bodů)** Definujte stěny polyedru. Charakterizujte polyedry, které nemají žádné maximální stěny. Charakterizujte minimální stěny polyedrů pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Dejte příklad polyedru, který má právě tři maximální stěny a jehož každá maximální stěna obsahuje právě jednu minimální stěnu.

4. **(30 bodů)** Vytvořte simplexovou tabulku odpovídající bazické množině indexů $\{4, 1\}$ (v tomto pořadí) pro úlohu lineárního programování minimalizovat

$$2x_1 \qquad\qquad + 2x_4 + x_5$$

při omezeních $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$ a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 - x_5 &= -2, \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

a s touto počáteční tabulkou vyřešte úlohu primární simplexovou metodou. Po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.