Lineární programování – jaro 2013 – 3. termín

1. **(15 bodů)** Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na reálná čísla a, b, c, d, e, g, h, k, ℓ, m, n, aby polyedr

$$P = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by \leq c,\ dx + ey \leq g \,\}$$

obsahoval bod, který se na obou složkách dohromady neliší o více než o 2 od nějakého bodu polyedru

$$Q = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid hx + ky \leq 0,\ \ell x + my \geq n \,\}.$$

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici C a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{\, f \mid Cz = a,\ z \leq 1 \,\}$$

je duální k úloze

$$\max \{\, dx \mid x \leq y^{\mathrm{T}} \leq 0,\ cx \leq yb,\ yA + d \geq c \,\},$$

kde x a y jsou vektory proměnných stejné dimenze, b, c, d jsou konstantní vektory a A je matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. **(25 bodů)** Definujte stěny obecného polyedru a jejich dimenzi. Formulujte větu charakterizující minimální stěny algebraicky pomocí systémů nerovnic. Určete dimenzi minimálních stěn polyedru $P = \{\, (x, y) \mid xA \leq y,\ x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^n \,\}$ a svoje tvrzení zdůvodněte. Formulujte a dokažte charakterizaci minimálních stěn jistého polyedru, na níž je založena primární simplexová metoda. (K důkazu můžete použít dříve formulovanou obecnou větu.)

4. **(30 bodů)** Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & 3x - y + z \\ \text{maximalizovat} & - 2y - z \end{array}$$

při stejných omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

$$\begin{aligned} 4x - y - 2z &\geq -1, \\ x - 2y - z &\leq -2, \\ y - 2z &\geq 3. \end{aligned}$$

Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.