Lineární programování – jaro 2016 – 4. termín

1. **(15 bodů)** Nechť A a B jsou matice typu $m \times n$ nad $\mathbb{R}$ a $b, c \in \mathbb{R}^m$ jsou sloupcové vektory takové, že množiny $P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \}$ a $Q = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leq c \}$ jsou disjunktní. Nechť dále $k \geq 1$ a $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ jsou nenulové sloupcové vektory. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby existovaly body $y \in P$ a $z \in Q$ takové, že přímka, která jimi prochází, je rovnoběžná s lineárním podprostorem generovaným vektory $v_1, \ldots, v_k$.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici F a vektor h takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{ f \mid zF \geq h,\ z \leq 0 \}$$

je duální k úloze

$$\min \{ cx \mid Ax = Bx,\ Cx \leq b,\ |dx| \leq 1 \}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.
($|dx|$ značí absolutní hodnotu dx.)

3. **(25 bodů)** Definujte stěny polyedru. Charakterizujte maximální stěny polyedrů algebraicky pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Dejte příklad matice A a vektoru b takových, že žádné dva řádky A nejsou lineárně závislé a systém $Ax \leq b$ obsahuje právě šest nerovnic, přičemž právě tři z nich jsou implicitními rovnicemi a právě jedna je nadbytečná.

4. **(30 bodů)** Duální simplexovou metodou nalezněte nějakou přípustnou simplexovou tabulku pro úlohu lineárního programování

$$\text{minimalizovat} \quad 6x - 3y - 2z$$

při omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

$$\begin{aligned} -x + y + 2z &\leq -1, \\ 2x - y + 2z &\geq 8, \\ 2x + y - 2z &\geq 6 \end{aligned}$$

a úlohu poté vyřešte primární simplexovou metodou.