Lineární programování – jaro 2017 – 2. termín

1. **(15 bodů)** Máme za úkol vytvořit volební program politické strany, který sestává z n kapitol. Do každé kapitoly můžeme napsat konstruktivní návrhy a strašení hrozbami. Zbytek programu bude tvořen nicneříkajícími frázemi. Potenciální voliči strany jsou v současnosti rozloženi následovně: α z nich by volilo naši stranu, β jinou stranu a γ se nehodlá voleb zúčastnit. Pokud i-tá kapitola programu (pro $i = 1, \dots, n$) bude obsahovat x procent konstruktivních návrhů, $a_i x$ voličů, kteří by nešli k volbám, bude volit naši stranu, ale $b_i x$ voličů, kteří by hlasovali pro naši stranu, bude volit stranu jinou. Bude-li i-tá kapitola z x procent složena ze strašení, bude naši stranu volit $c_i x$ voličů, kteří by volili stranu jinou, ale $d_i x$ voličů, kteří plánovali hlasovat pro naši stranu, k volbám nepřijde. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na čísla α, β, γ, a_i, b_i, c_i, d_i, abychom mohli vytvořit program splňující současně následující podmínky:

   - Mezi našimi potenciálními voliči, kteří přijdou k volbám, získáme alespoň 70 procent hlasů.
   - V každé kapitole programu je nejvýše 50 procent nicneříkajících frází.
   - V jednotlivých kapitolách programu zabírá strašení v průměru nejvýše 10 procent.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici C a vektor a takové, že úloha lineárního programování

   $$\min \{\, f \mid Cz = a,\ z \le 1 \,\}$$

   je duální k úloze

   $$\max \{\, dx \mid x \le y^{\mathrm{T}} \le 0,\ cx \le yb,\ yA = yB \,\},$$

   kde x a y jsou vektory proměnných stejné dimenze, b, c, d jsou konstantní vektory a A a B jsou matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. **(25 bodů)** Definujte polyedry, polytopy a konečně generované konvexní kužely. Popište konstrukci, která z polytopů a konečně generovaných konvexních kuželů vytvoří právě všechny polyedry. Dokažte, že každý polyedr je opravdu možné touto konstrukcí získat a že každý jeho vrchol musí být současně i vrcholem příslušného polytopu. Popište příslušný polytop a kužel pro polyedr $\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x - y \le 1 \,\}$.

4. **(30 bodů)** Vyřešte primární simplexovou metodou úlohu lineárního programování

   $$\text{minimalizovat} \quad 2x + y - 10z - t$$

   při omezeních $x \ge 0$, $y \ge 0$, $8 \ge z \ge 0$, $t \ge 0$ a

   $$\begin{aligned} x - y + 2z + 2t &\le -4, \\ 2x - 2y + 3z + 4t &\ge -15, \\ x \phantom{{}- 2y} - 2z - t &\ge -6. \end{aligned}$$

   Poté využijte závěrečnou simplexovou tabulku k vyřešení úlohy, která vznikne z původní úlohy nahrazením podmínky $8 \ge z$ podmínkou $2 \ge z$, duální metodou.