Numerické metody

Jiří Zelinka

jaro 2018

Literatura

- Horová I., Zelinka J.: Numrické metody, 2. rozšířené vydání, MU, 2004
- Ralston A.: Základy numerické matematiky, Academia, 1978
- Vitásek E.: Numerické metody, SNTL, 1987
- Mathews, J.H., Fink, K.D.: Numerical methods using MATLAB, Pearson Prentice Hall, 2003
- Stoer, J., Bulirsch R.: Introduction to Numerical Analysis, Spriger, 1992

Osnova

- Řešení nelineárních rovnic
- Polynomy
- Řešení soustav lineárních rovnic – iterační metody
- Řešení soustav nelineárních rovnic
- Řešení soustav lineárních rovnic – přímé metody

Předpoklady

- Lineární algebra
- Diferenciální počet v $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$)
- Integrální počet v $\mathbb{R}$

Chyby

x: přesná hodnota, $\tilde{x}$: aproximace x

$x - \tilde{x}$: *absolutní chyba* $\tilde{x}$, $|\tilde{x} - x| \leq \alpha$: *odhad absolutní chyby*

$\frac{x-\tilde{x}}{x}$: *relativní chyba*, $\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| \leq \delta$: *odhad relativní chyby*

Řekneme, že aproximace $\tilde{x}$ čísla x má s platných cifer, jestliže s je největší celé nezáporné číslo takové, že platí

$$\left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right| \leq 5.10^{-s}.$$

Nechť x je reálné číslo, které má obecně nekonečné dekadické vyjádření. Číslo $x^{(d)}$, které má d desetinných míst, je správně zaokrouhlenou hodnotou čísla x, platí-li

$$|x - x^{(d)}| \leq \frac{1}{2} 10^{-d}.$$

Ve správně zaokrouhleném čísle jsou všechny cifry platné.

Podmíněnost úloh

Řekneme, že korektní úloha je *dobře podmíněna*, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu výstupu. Je-li $y + \Delta y$ resp. y výstupní hodnota odpovídající vstupním datům $x + \Delta x$ resp. x, potom číslo

$$C_p = \frac{\left|\dfrac{\Delta y}{y}\right|}{\left|\dfrac{\Delta x}{x}\right|} = \frac{|\text{relativní chyba na výstupu}|}{|\text{relativní chyba na vstupu}|}$$

nazýváme *číslem podmíněnosti* úlohy. Je-li $C_p \approx 1$, je úloha velmi dobře podmíněna. Pro velká C_p (> 100) je úloha špatně podmíněna.

Typické špatně podmíněné úlohy:

- dělení malým číslem
- odečítání dvou přibližně stejných čísel
- zvětšování chyby v iteračním výpočtu

$$A_n = n \cdot A_{n-1}$$

Celková chyba výpočtu

Daný problém → Matematická formulace → Numerická metoda → Algoritmus

$Y = F(x_1, \ldots, x_n)$ $\quad$ $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ $\quad$ $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$

- $Y - y$: *chyba metody*
- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$: *chyba primární*
- $f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) - \tilde{f}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$: *chyba sekundární*

Odhad primární chyby:

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)| \leq \sum_{i=1}^{n} A_i \alpha_i,$$

kde

$$A_i = \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) \right|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Symbolika O, o

f – funkce definovaná v okolí $B(a)$ bodu $a \in \langle -\infty, \infty \rangle$
g – funkce nenulová v prstencovém okolí bodu a

$$f(x) = O(g(x)) \text{ pro } x \to a \qquad \exists K : |f(x)| \leq K|g(x)| \text{ v } B(a).$$

Význam: funkce f se v okolí bodu a chová „*podobně*" jako funkce g.

$$f(x) = o(g(x)) \text{ pro } x \to a \qquad \lim_{x \to a} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0\,.$$

Význam: funkce f konverguje v bodě a k nule „*rychleji*" než funkce g.

Podobně

$$a_n = O(b_n) \text{ nebo } a_n = o(b_n) \text{ pro } n \to \infty\,,$$

kde a_n, b_n jsou prvky posloupností.

Dodatek „pro $x \to a$“ se často vynechává, pokud je jasné, o které a se jedná. Např. $a_n = O(1/n)$, $\qquad f(h) = o(h^3)$.

Příklad:

$a_n = O(1)$: ohraničená posloupnost

$f(h) = o(1)$: funkce mající v 0 nulovou limitu

Taylorův rozvoj

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

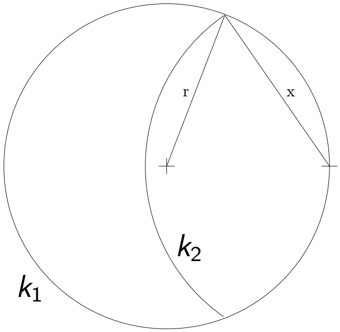
$$f(x+h) = f(x)+f'(x)h+O(h^2), \quad f(x+h) = f(x)+f'(x)h+o(h)$$

Početní pravidla:

$$\begin{aligned}
O(g) + O(g) &= O(g) \\
o(g) + o(g) &= o(g) \\
O(g_1) \cdot O(g_2) &= O(g_1 \cdot g_2) \\
O(g_1) \cdot o(g_2) &= o(g_1 \cdot g_2) \\
o(g) &= O(g)
\end{aligned}$$

Motivační příklad

Pro kružnici k_1 o poloměru r sestrojte kružnici k_2 se středem na kružnici k_1 tak, aby oblast ohraničena oběma kružnicemi měla poloviční obsah než vnitřek kružnice k_1.



Úloha ze starého Egypta

Stojíš před stěnou, za kterou je studna Lotosu jako kruh Slunce. Vedle studny je položen jeden kámen, jedno dláto a dva stvoly třtiny. Jeden stvol je dlouhý tři míry, druhý je dlouhý dvě míry. Stvoly (opřené ve stabilní poloze v diametrálně protilehlých bodech na okraji dna) se kříží na povrchu vody ve studni Lotosu a ten povrch je jednu míru nade dnem. Kdo určí velikost nejdelší délky, kterou lze umístit do dna studny Lotosu, ten si vezme oba stvoly a bude knězem boha Ra.

Řešení nelineárních rovnic

Řešíme rovnici $f(x) = 0$ na **uzavřeném** intervalu $I = [a, b]$, pro reálnou **spojitou** funkci f, ξ – řešení rovnice,

Iterační proces: vytváříme posloupnost $(x_k)_{k=0}^{\infty}$, $x_k \to \xi$.
$(x_k)_{k=0}^{\infty}$ – iterační posloupnost.

Metoda půlení intervalu – bisekce

$f(a) \cdot f(b) \leq 0$, $a_0 = a$, $b_0 = b$, položíme $x_0 = (a_0 + b_0)/2$.

Pokud $f(a_0) \cdot f(x_0) \leq 0$ volíme
$a_1 = a_0$, $b_1 = x_0$, jinak
$a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$,
tedy $\xi \in [a_1, b_1]$.

Obecně: známe a_k, b_k, $f(a_k) \cdot f(b_k) \leq 0$, tedy $\xi \in [a_k, b_k]$, položíme $x_k = (a_k + b_k)/2$.

Pokud $f(a_k) \cdot f(x_k) \leq 0$ volíme
$a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$, jinak
$a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$,
tedy $\xi \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Odhad absolutní chyby v k-tém kroku:

$$|x_k - \xi| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$$

Algoritmus končí, pokud je absolutní chyba dostatečně malá.

Metoda pevného bodu, prostá iterační metoda

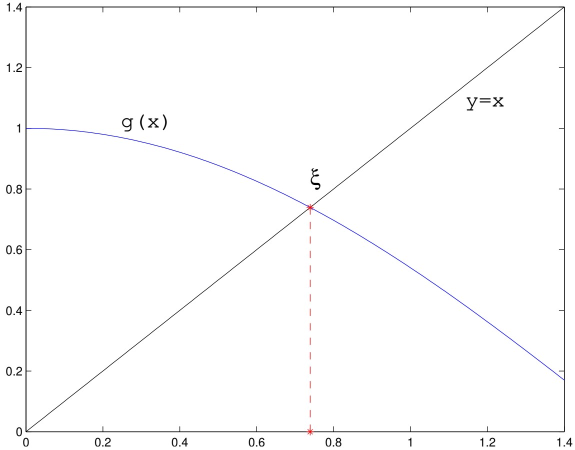
- Tato metoda se používá pro rovnici $x = g(x)$
- Funkce g je spojitá na $I = [a, b]$
- Řešení ξ této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce g

Iterační proces

- Zvolíme $x_0 \in I$ a položíme $x_1 = g(x_0)$
- Obecně $x_{k+1} = g(x_k)$
- Funkce g se nazývá **iterační funkce**

Geometrická interpretace

Pevný bod ξ je průsečík grafu funkce g a přímky $y = x$.



Existence pevného bodu

Věta: Jestliže spojitá funkce g zobrazuje interval I do sebe, tj. pro každé $x \in I$ platí $g(x) \in I$, pak na intervalu I existuje alespoň jeden pevný bod ξ funkce g.

Jednoznačnost pevného bodu

Definice Funkce g zobrazující interval I do sebe se nazývá kontrakce na I, jestliže existuje taková konstanta L (Lipschitzova konstanta), $0 \leq L < 1$, že pro každé $x, y \in I$ platí
$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

Banachova věta o pevném bodě

Jestliže g je kontrakce na I, pak g má na tomto intervalu jediný pevný bod a iterační posloupnost definovaná vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ konverguje k pevnému bodu funkce g pro libovolné $x_0 \in I$.

Odhad chyby

Věta: Nechť g je kontrakce s Lipschitzovou konstantou L na I a $x_0 \in I$ je libovolné. Pak pro iterační posloupnost definovanou vztahem $x_{k+1} = g(x_k)$ platí odhad

$$|x_k - \xi| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_0 - x_1|$$

Určení konstanty L pomocí derivace

Lagrangeova věta o střední hodnotě:

$$g(x) - g(y) = g'(\mu) \cdot (x - y)$$

Bod μ leží mezi x a y.

Pokud pro každé $x \in I$ platí $|g'(x)| \leq L < 1$ a g zobrazuje I do sebe, je g kontrakce na I.

$$L = \max_{x \in I} |g'(x)|$$