

Numerické metody

3. přednáška, 8. března 2018

Jiří Zelinka

Metoda pevného bodu, prostá iterační metoda

- Tato metoda se používá pro rovnici $x = g(x)$
- Funkce g je spojitá na $I = [a, b]$
- Řešení ξ této rovnice nazýváme **pevným bodem** funkce g

Iterační proces

- Zvolíme $x_0 \in I$ a položíme $x_1 = g(x_0)$
- Obecně $x_{k+1} = g(x_k)$
- Funkce g se nazývá **iterační funkce**

Řád metody

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C \neq 0,$$

p - řád metody

Věta: Necht' funkce g má v okolí bodu ξ derivace až do řádu $p \geq 1$ včetně. Iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots$ je řádu p tehdy a jen tehdy, když platí

$$\xi = g(\xi), \quad g^{(j)}(\xi) = 0, \quad 1 \leq j < p, \quad g^{(p)}(\xi) \neq 0.$$

Klasifikace pevných bodů

Pevný bod ξ funkce g se nazývá

- **přitahující** (atraktivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí V tohoto bodu ξ , že pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in V$ posloupnost iterací $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje k bodu ξ .
- **odpužující** (repulzivní) pevný bod, jestliže existuje takové okolí U bodu ξ , že pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in U, x_0 \neq \xi$, existuje takové k , že $x_k \notin U$.

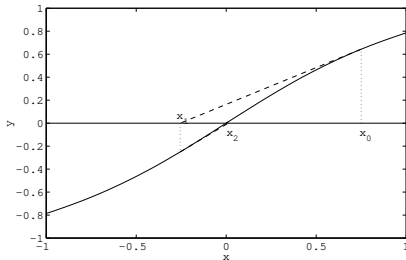
Určení typu pevných bodů:

Nechť $g \in C[a, b], g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ a necht' g má v bodě ξ derivaci.

- Je-li $|g'(\xi)| < 1$, pak ξ je přitahující pevný bod.
- Je-li $|g'(\xi)| > 1$, pak ξ je odpužující pevný bod.

Newtonova metoda, metoda tečen

Uvažujme rovnici $f(x) = 0$. Zvolme x_0 a řešení hledáme na tečně k f v bodě x_0 jako její průsečík s osou x .



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Podobně pokračujeme dál: x_{k+1} je průsečík tečny k funkci f v bodě x_k s osou x .

Věta

Nechť $f \in C^2[a, b]$. Nechť $\xi \in [a, b]$ je kořenem rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná Newtonovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x_0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq [a, b]$.

Řád Newtonovy metody je roven 2 pro jednoduchý kořen ξ .

Odhad chyby:

$$\text{a) } |x_{k+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m}(x_k - \xi)^2$$

$$\text{b) } |x_{k+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m}(x_{k+1} - x_k)^2$$

Konec opakování

- Výpočet odmocniny $\sqrt[m]{a}$:
 $f(x) = x^m - a$, $f'(x) = m x^{m-1}$,
Newtonova metoda:

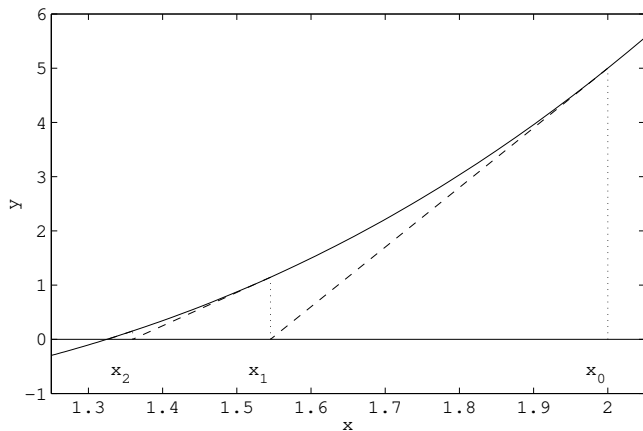
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^m - a}{m x_k^{m-1}}$$

- Výpočet převrácené hodnoty $\frac{1}{a}$ bez dělení:
Jak volit funkci f ?

Věta

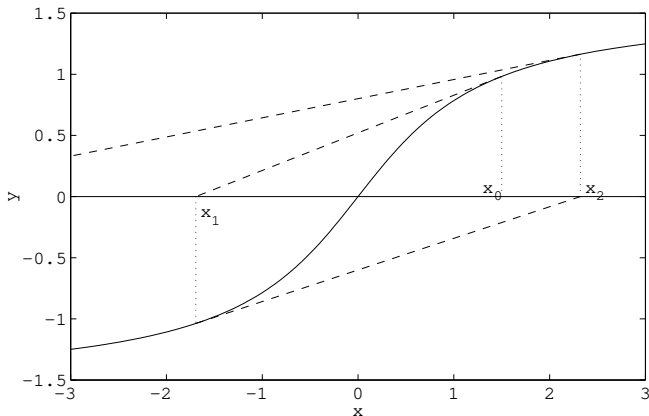
Nechť $f \in C^2[a, b]$ a necht' rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu jediný kořen ξ . Necht' f' , f'' nemění znaménka na intervalu $[a, b]$, přičemž $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Necht' počáteční aproximace x_0 je ten z krajních bodů a, b , v němž znaménko funkce je stejné jako znaménko f'' na intervalu $[a, b]$. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou konverguje monotonně k bodu ξ .

Fourierovy podmínky



Problémy:

- ξ – inflexní bod, např. funkce $\arctan x$



- Nevhodná volba iterace: $f'(x_k) = 0$.
- Vícenásobný kořen: $f(\xi) = f'(\xi) = 0$
→ pomalá konvergence

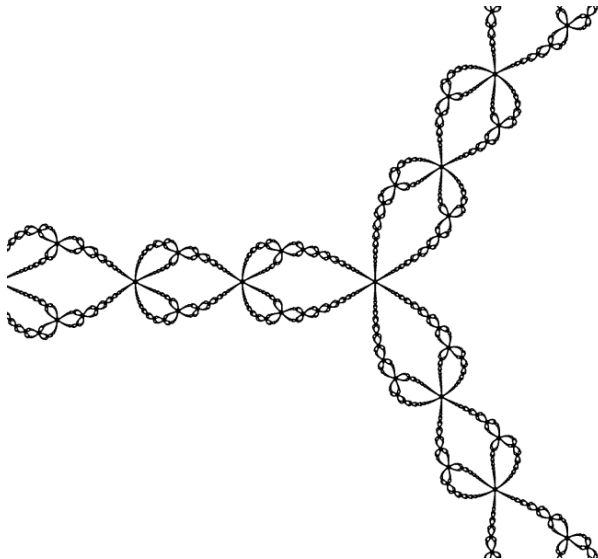
Gaston Maurice Julia, 1893 – 1978

Pro funkci $f(x) = x^3 - 1$ řešil se studenty problém, pro které reálné počáteční iterace metoda selže, t.j. $x_k = 0$.

DŮ: Totéž v komplexním oboru – nikdo nevyřešil.

Důsledek: článek o 199 stranách *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, Journal de Math. Pure et Appl., 1918

Juliova množina

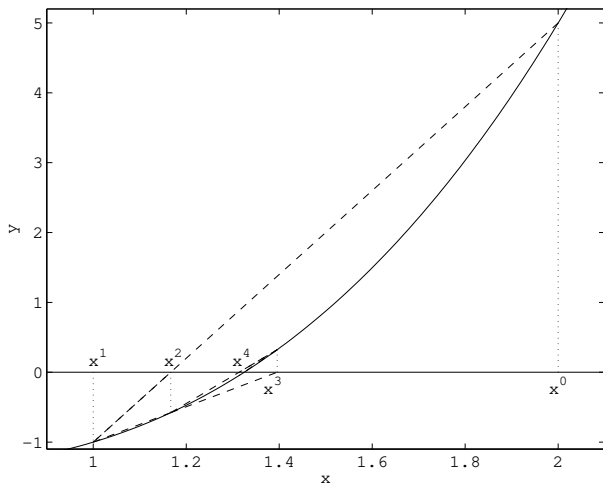


Derivaci v bodě x_k u Newtonovy metody nahradíme směrnici sečny v bodech $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Výsledná iterační metoda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad i = 1, 2, \dots$$



Věta

Nechť rovnice $f(x) = 0$ má kořen ξ a necht' derivace f' , f'' jsou spojité v okolí bodu ξ , přičemž $f'(\xi) \neq 0$. Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu ξ , pokud zvolíme počáteční aproximace x_0, x_1 dostatečně blízko bodu ξ a metoda je řádu $(1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1,618$.

Příklad

Výpočet $\sqrt[3]{10}$:

Pozor! Při pokusu o co nejpřesnější výpočet může dojít k nedefinovanému výrazu typu $0/0$.