

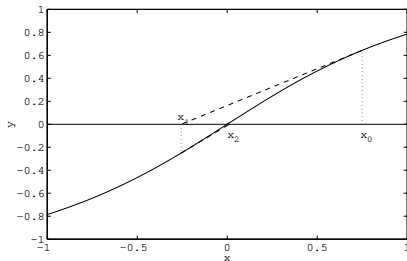
# Numerické metody

## 4. přednáška, 15. března 2018

Jiří Zelinka

## Newtonova metoda, metoda tečen

Uvažujme rovnici  $f(x) = 0$ . Zvolme  $x_0$  a řešení hledáme na tečně k  $f$  v bodě  $x_0$  jako její průsečík s osou  $x$ .



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Podobně pokračujeme dál:  $x_{k+1}$  je průsečík tečny k funkci  $f$  v bodě  $x_k$  s osou  $x$ .

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen  $\xi$ .

## Věta

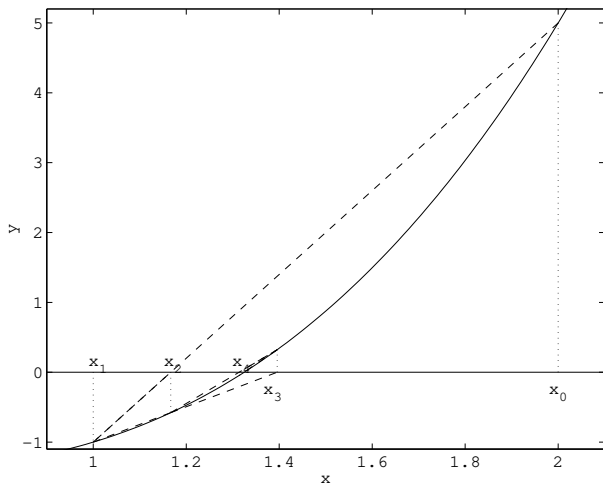
Nechť  $f \in C^2[a, b]$  a necht' rovnice  $f(x) = 0$  má v intervalu jediný kořen  $\xi$ . Necht'  $f'$ ,  $f''$  nemění znaménka na intervalu  $[a, b]$ , přičemž  $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$ . Necht' počáteční aproximace  $x^0$  je ten z krajních bodů  $a, b$ , v němž znaménko funkce je stejné jako znaménko  $f''$  na intervalu  $[a, b]$ . Pak posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  určená Newtonovou metodou konverguje monotonně k bodu  $\xi$ .

Derivaci v bodě  $x_k$  u Newtonovy metody nahradíme směrnici sečny v bodech  $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$  a  $[x_k, f(x_k)]$ .

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Výsledná iterační metoda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad i = 1, 2, \dots$$



**Pozor!** Při pokusu o co nejpřesnější výpočet může dojít k nedefinovanému výrazu typu  $0/0$ .

## Věta

Nechť rovnice  $f(x) = 0$  má kořen  $\xi$  a nechť derivace  $f'$ ,  $f''$  jsou spojité v okolí bodu  $\xi$ , přičemž  $f'(\xi) \neq 0$ . Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu  $\xi$ , pokud zvolíme počáteční aproximace  $x_0, x_1$  dostatečně blízko bodu  $\xi$  a metoda je řádu  $(1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1,618$ .

**Konec opakování**

# Metoda regula falsi

Předpokládejme  $f(a)f(b) < 0$ ,  $f \in C[a, b]$ . Použijeme metodu sečen, přitom vybíráme iterace tak, aby ve dvou po sobě jdoucích měla  $f$  opačné znaménko:

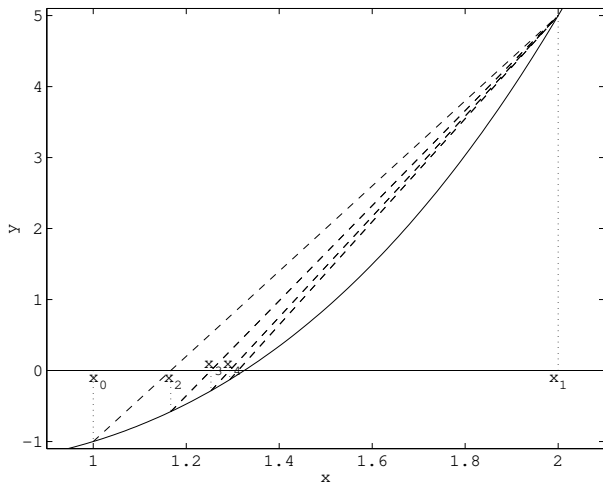
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

kde  $s = s(k)$  je největší index takový, že  $f(x_k)f(x_s) < 0$ , přitom  $f(x_0)f(x_1) < 0$  (tj. např.  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$ ).

**Poznámka:** pokud je funkce  $f$  konvexní nebo konkávní na  $[a, b]$ , je  $x_s$  jeden z krajní bodů intervalu.

**Řád metody:** 1

# Metoda regula falsi





# Kvazinevtonova metoda (plus/minus)

Tečnu u Newtonovy metody nahradíme sečnou procházející bodem  $[x_k, f(x_k)]$  a bodem  $[x_k + f(x_k), f(x_k + f(x_k))]$ , respektive bodem  $[x_k - f(x_k), f(x_k - f(x_k))]$ . Přitom pokud je bod  $x_k$  blízko hledaného kořene  $\xi$ , pak hodnota  $f(x_k)$  je blízka nule a sečna procházející uvedenými body je blízka tečně vedené bodem  $x_k$ .

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{x_k - (x_k \pm f(x_k))} = \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{\mp f(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{\mp f(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))} = x_k \pm \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}$$

## Iterační funkce:

$$g(x) = x \pm \frac{f^2(x)}{f(x) - f(x \pm f(x))}$$

### Poznámka:

Kvazinewtonova metoda se také někdy nazývá Steffensenova - viz příště.

### Věta

Nechť  $f \in C^1[a, b]$ ,  $\xi \in [a, b]$  nechť je řešením rovnice  $f(x) = 0$  a  $f'(\xi) \neq 0$ . Pak existuje  $\varepsilon > 0$  tak, že posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  generovaná kvazinewtonovou metodou konverguje k bodu  $\xi$  pro každou počáteční aproximaci  $x^0 \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \cap [a, b]$ . Pokud má funkce  $f$  v okolí bodu  $\xi$  spojitou druhou derivaci, je řád metody alespoň 2.

**Důkaz:** L'Hospitalovo pravidlo.

## Kořen $\xi$ násobnosti $M$

$$f(\xi) = 0, f'(\xi) = 0, \dots, f^{(M-1)}(\xi) = 0, f^{(M)}(\xi) \neq 0$$

## Věta

Nechť kořen  $\xi$  má násobnost  $M > 1$ . Pak modifikovaná Newtonova metoda

$$x_{k+1} = x_k - M \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

je metoda druhého řádu.

Násobnost kořene zpravidla neznáme  $\implies$  univerzální volba:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Funkce  $u$  má stejné kořeny jako funkce  $f$ , ale násobnosti 1, takže můžeme použít Newtonovu metodu pro funkci  $u$ .

Tento postup nefunguje pro funkci, která má všechny derivace nulové – např.  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ .

Pro tuto funkci selhávají i kriteria zastavení konvergence:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon, \quad \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon, \quad |f(x_k)| < \varepsilon$$

# Urychlení konvergence – Aitkenova $\delta^2$ -metoda

## Věta

Nechť je dána posloupnost  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ ,  $x_k \neq \xi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  
 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ , a necht' tato posloupnost splňuje podmínky

$$x_{k+1} - \xi = (C + o(1))(x_k - \xi), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad |C| < 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} o(1) = 0$$

Pak posloupnost

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

je definována pro všechna dostatečně velká  $k$  a platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\hat{x}_k - \xi}{x_k - \xi} = 0,$$

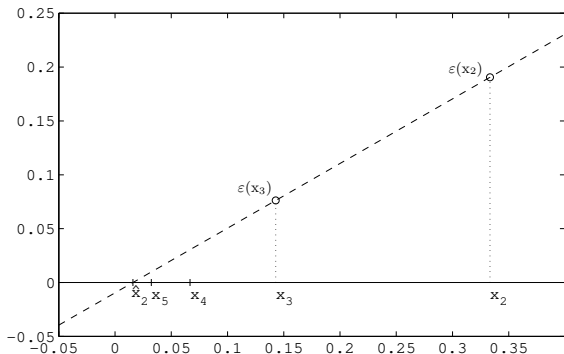
tj. posloupnost  $\{\hat{x}_k\}$  konverguje k limitě  $\xi$  rychleji než  
posloupnost  $\{x_k\}$ .

# Geometrická interpretace

Položme

$$\varepsilon(x_k) = x_k - x_{k+1} = x_k - \xi - (x_{k+1} - \xi) = (x_k - \xi)(1 - C + o(1))$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_{k+1}) &= x_{k+1} - x_{k+2} = (x_{k+1} - \xi)(1 - C + o(1)) = \\ &= (x_k - \xi)(C + o(1))(1 - C + o(1)) = \varepsilon(x_k)(C + o(1))\end{aligned}$$



Rovnice přímky:

$$y - \varepsilon(x_k) = \frac{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}(x - x_k)$$

Průsečík s osou  $x$  ( $y = 0$ ) je bod  $\hat{x}_k$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{\varepsilon(x_k)(x_k - x_{k+1})}{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}.$$

Vyjádření pomocí diferencí:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$$

$$\Delta^3 x_k = \Delta^2 x_{k+1} - \Delta^2 x_k$$

$\vdots$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}$$