Numerické metody
6. přednáška, 29. března 2018

Jiří Zelinka

Polynomy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0.$$

Věta – hranice kořenů

Nechť

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0, \\ A &= \max\left(|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\right), \\ B &= \max\left(|a_n|, \ldots, |a_1|\right), \end{aligned}$$

kde $a_0 a_n \neq 0$. Pak pro všechny kořeny $\xi_k, k = 0, 1, \ldots, n$, polynomu P platí

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} \leq |\xi_k| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

Příklad

Polynom s kořeny $\xi_1 = 1, \ldots, \xi_5 = 5$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \\ &= x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120 \end{aligned}$$

$$A = B = 274, \quad \frac{1}{1 + \dfrac{274}{|120|}} = \frac{60}{197} \leq |\xi_k| \leq 275.$$

Věta

$$1.\ |\xi_k| \le \max\left\{1, \sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{a_j}{a_n}\right|\right\}$$

$$2.\ |\xi_k| \le 2\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \sqrt{\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|}, \sqrt[3]{\left|\frac{a_{n-3}}{a_n}\right|}, \dots, \sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}\right\}$$

$$3.\ |\xi_k| \le \max\left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|, 1+\left|\frac{a_1}{a_n}\right|, \dots, 1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}.$$

Předchozí příklad:

$$P(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

$$1.\ |\xi_k| \le \max\{1, 719\} = 719$$

$$2.\ |\xi_k| \le 2\max\{30,\ 18.44,\ 12.16,\ 8.14,\ 5.21\} = 60$$

$$3.\ |\xi_k| \le \max\{120,\ 275,\ 226,\ 86,\ 16\} = 275.$$

Počet reálných kořenů polynomu

Poznámka - odstranění násobných kořenů

Jestliže P má kořen ξ násobnosti $k > 1$, pak ξ je kořenem P' násobnosti $k-1$. Takže dělením polynomu P největším společným dělitelem P a P' dostaneme polynom, který má stejné kořeny jako P, ale všechny jednoduché.

Příklad: $P(x) = (x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Definice

Nechť $c_1, \ldots, c_m$ je posloupnost reálných čísel různých od nuly. Řekneme, že pro dvojici c_k, c_{k+1} **nastává znaménková změna**, jestliže $c_k c_{k+1} < 0$.
Řekneme, že dvojice c_k, c_{k+1} **zachovává znaménko**, jestliže $c_k c_{k+1} > 0$.

Definice

Posloupnost reálných polynomů

$$P = P_0, P_1, \dots, P_m$$

se nazývá **Sturmovou posloupností** příslušnou polynomu P, jestliže

- Všechny reálné kořeny polynomu P_0 jsou jednoduché.
- Je-li ξ reálný kořen polynomu P_0, pak $sign P_1(\xi) = -sign P_0'(\xi)$.
- Pro $i = 1, 2, \dots, m-1$,

  $$P_{i+1}(\alpha) P_{i-1}(\alpha) < 0,$$

  jestliže α je reálný kořen polynomu P_i.
- Poslední polynom P_m nemá reálné kořeny.

Konstrukce Sturmovy posloupnosti

$$P_0(x) = P(x), \qquad P_1(x) = -P_0'(x)$$

a sestrojme další polynomy P_{i+1} rekurentně dělením polynomu P_{i-1} polynomem P_i:

$$P_{i-1}(x) = Q_i(x)P_i(x) - c_i P_{i+1}(x), \qquad i = 1, 2, \dots,$$

kde

$$\mathrm{st}\, P_i > \mathrm{st}\, P_{i+1}$$

a konstanty c_i jsou kladné, ale jinak libovolné. Lze říci, že P_{i+1} je záporně vzatý zbytek při dělení $P_{i-1} : P_i$.
Protože stupně polynomů klesají, musí algoritmus končit po $m \leq n$ krocích.

Sturmova věta

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \leq x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \ldots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Důkaz

Kořen polynomu P_i nemůže být kořenem P_{i+1}.

Vliv malé změny hodnoty a na počet znaménkových změn $W(a)$ v posloupnosti pro a, které je kořenem některého z polynomů P_i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$:

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	$-$	0	$+$
P_1	$-$	$-$	$-$
$W(x)$	0	0	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	$+$	0	$-$
P_1	$+$	$+$	$+$
$W(x)$	0	0	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	$-$	$-$	$-$
P_i	$-$	0	$+$
P_{i+1}	$+$	$+$	$+$
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	$+$	$+$	$+$
P_i	$-$	0	$+$
P_{i+1}	$-$	$-$	$-$
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	$-$	$-$	$-$
P_i	$+$	0	$-$
P_{i+1}	$+$	$+$	$+$
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	$+$	$+$	$+$
P_i	$+$	0	$-$
P_{i+1}	$-$	$-$	$-$
$W(x)$	1	1	1

Příklad

Určete počet reálných kořenů polynomu

$$P(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Řešení. Sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou polynomu $P(x)$. Je

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 - 3x + 1, \qquad P_0'(x) = 3x^2 - 3, \\ P_1(x) &= -x^2 + 1. \end{aligned}$$

Polynom P_2 je záporně vzatý zbytek při dělení polynomu P_0 polynomem P_1, tj. $P_2(x) = 2x - 1$ a dále $P_3(x) = -3/4$.

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= x^3 - 3x + 1 \\
P_1(x) &= -x^2 + 1 \\
P_2(x) &= 2x - 1 \\
P_3(x) &= -3/4
\end{aligned}
$$

Sestavíme tabulku pro určení počtu reálných kořenů.

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
0	$+$	$+$	$-$	$-$	1
$+\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	3
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	0
-1	$+$	0	$-$	$-$	1
1	$-$	0	$+$	$-$	2
2	$+$	$-$	$+$	$-$	3

Odhady počtu kořenů polynomu

Věta (Descartes)

Počet kladných kořenů polynomu P (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, \ldots, a_n$ nebo o sudé číslo menší.
Jsou-li všechny koeficienty $a_0, \ldots, a_n$ různé od nuly, pak počet záporných kořenů je roven počtu zachování znamének v této posloupnosti nebo o sudé číslo menší.

Příklad

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + 8x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 10$$

Posloupnost koeficientů:	$1, -2, 8, 3, -1, 1, -10$
Počet kladných kořenů:	5 nebo 3 nebo 1
Počet záporných kořenů:	1