Numerické metody
11. přednáška, 3. května 2018

Jiří Zelinka

Opakování – Gaussova eliminační metoda

Úprava soustavy na soustavu s horní trojúhelníkovou maticí R:

$$(A \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(R \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$$

Pak provádíme tzv. zpětný chod – počítáme řešení od poslední složky k první.

Elementární úpravy a matice úprav

Nemění řešení, každá úprava má inverzi.

1. násobení řádku nenulovou konstantou c

$$I_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & c & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad I_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1/c & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. výměna řádků i, k

$$P_{i,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \cdots & & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & 0 & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \vdots & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{i,k}^{-1} = P_{i,k}$$

$P_{i,k}$ – permutační matice

3. přičtení c násobku i-tého řádku ke k-tému, $i < k$

$$G_{i,k,c} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & & \cdots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & c & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$
G_{i,k,c}^{-1} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & & \cdots & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & -c & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.
$$

Ve skutečnosti pro převod na trojúhelníkovou matici stačí 2. a 3. elementární úprava.

Postup při Gaussově eliminaci

(1) výměna 1. a k-tého řádku (v případě potřeby)

$$(A \mid \boldsymbol{b}) \longrightarrow \left(A^{(1)} \mid \boldsymbol{b}^{(1)}\right), \quad \left(A^{(1)} \mid \boldsymbol{b}^{(1)}\right) = P_{1,k} \cdot (A \mid \boldsymbol{b})$$

(1') vynulování prvního sloupce pod hlavní diagonálou

$$\left(A^{(1')} \mid \boldsymbol{b}^{(1')}\right) = G_1 \cdot \left(A^{(1)} \mid \boldsymbol{b}^{(1)}\right), \quad G_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$l_{k1} = -\frac{a_{k1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

(i) výměna i-tého. a k-tého řádku (v případě potřeby)

$$\left(A^{(i)} \mid \boldsymbol{b}^{(i)}\right) = P_{i,k} \cdot \left(A^{(i-1')} \mid \boldsymbol{b}^{(i-1')}\right)$$

(i') vynulování i-tého sloupce pod hlavní diagonálou

$$\left(A^{(i')} \mid \boldsymbol{b}^{(i')}\right) = G_i \cdot \left(A^{(i)} \mid \boldsymbol{b}^{(i)}\right),$$

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ & & l_{i+1,i} & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & l_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad l_{ki} = -\frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$$

$i = 2, \ldots, n-1$

Gaussova eliminaca bez výměny řádků:

$$\left(R \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right) = G_{n-1} \cdot \ldots G_2 \cdot G_1 \cdot (A \mid \boldsymbol{b})$$

tedy

$$R = G_{n-1} \cdot \ldots G_2 \cdot G_1 \cdot A$$

odkud

$$G_1^{-1} G_2^{-1} \ldots G_{n-1}^{-1} R = A.$$

Matice G_i jsou dolní trojúhelníková, tedy G_1^{-i} jsou také dolní trojúhelníkové, takže

$$A = L \cdot R, \qquad L = G_1^{-1} G_2^{-1} \ldots G_{n-1}^{-1}.$$

L – dolní trojúhelníková matice.

$$G_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & -l_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -l_{ni} & & 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$L = G_1^{-1} G_2^{-1} \dots G_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -l_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -l_{n1} & \cdots & -l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

LR rozklad

$A = L \cdot R$: LR (též LU) rozklad matice A

Použití při řešení soustavy: substituce $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, řešíme soustavu $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ s dolní trojúhelníkovou maticí, pak $R\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ s horní trojúhelníkovou maticí.

LR rozklad s výměnou řádků

Provádíme LR rozklad matice $P \cdot A$, kde P je vhodná permutační matice, která provádí výměnu řádků.
Při praktickém výpočtu, pokud narazíme na potřebu vyměnit řádky, postupujeme takto:
Pokud bychom vyměnili řádky předem, v už vypočítané části matice L by tyto řádky byly vyměněny, zbytek by se nezměnil.
Proto můžeme vyměnit řádky ve vypočítané části matice L.
Dále v pomocném vektoru $\boldsymbol{p}$ na začátku nastaveném na $(1, 2, \ldots, n)^T$ zaznamenáme výměnu řádků, tedy vyměníme v něm stejné řádky.

Výběr vedoucího prvku (pivota) – částečný

Při úpravě i-tého sloupce najdeme mezi prvky $a_{ii}^{(i-1)}, \ldots, a_{ni}^{(i-1)}$ prvek s maximální absoulutní hodnotou (např. $a_{ki}^{(i-1)}$), pak vyměníme i-tý a k-tý řádek.

Výběr vedoucího prvku (pivota) – úplný

Hledáme prvek s maximální absoultní hodnotou mezi $a_{jk}^{(i-1)}$, $i \leq j \leq n$, $i \leq k \leq n$, pak vyměníme příslušný řádek a spoupec, čímž se změní pořadí proměnných.

Věta

Nechť všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \ldots \det A \neq 0.$$

Pak matici A lze rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice.

Důsledky

- Nechť matice A je pozitivně definitní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.
- Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní. Pak GEM lze provést bez výměny řádků a sloupců.

Věta

Nechť matice A je symetrická a její všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak existuje taková horní trojúhelníková matice $T \in \mathcal{M}_n$, že $A = T^T T$.

Prvky matice $T = (t_{ij})$:

- $t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j = 2, \ldots, n,$
- $t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{l=1}^{i-1} t_{li}^2}, \quad i = 2, \ldots, n$
- $t_{ij} = \frac{1}{t_{ii}}(a_{ij} - \sum\limits_{l=1}^{i-1} t_{li} t_{lj}), \qquad j > i \qquad t_{ij} = 0, \qquad j < i$

Příklad

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Croutova metoda

Rozklad třídiagonální matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} \\ a_{i,i-1} &= l_{i,i-1}, & i &= 2,3,\ldots,n \\ a_{ii} &= l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, & i &= 2,3,\ldots,n \\ a_{i,i+1} &= l_{ii}u_{i,i+1}, & i &= 1,2,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

Věta

Nechť $A \in \mathcal{M}_n$ je třídiagonální matice s vlastnostmi:

$$
\left.\begin{array}{ll}
a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0, & i = 2, 3, \dots, n-1, \\
|a_{11}| > |a_{12}|, & \\
|a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|, & i = 2, \dots, n-1, \\
|a_{nn}| > |a_{n,n-1}|. &
\end{array}\right\} \begin{array}{l} A \text{ – řádkově diagon.} \\ \text{dominantní} \end{array}
$$

Pak matice A je regulární a hodnoty l_{ii}, $i = 1, \dots, n$, vypočtené ze uvedených vztahů jsou různé od nuly.

Důsledek

Jsou-li splněny předpoklady věty, lze matici A rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice v uvedeném tvaru.

Příklad

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & - & x_2 & & & & & = & 2 \\
-x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & -3 \\
 & & -x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\
 & & & & -x_3 & + & 2x_4 & = & 1.5
\end{array}
$$