Numerické metody
12. přednáška, 10. května 2018

Jiří Zelinka

Věta

Nechť matice A je symetrická a její všechny hlavní minory matice $A \in \mathcal{M}_n$ jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \dots \qquad , \det A \neq 0.$$

Pak existuje taková horní trojúhelníková matice $T \in \mathcal{M}_n$, že $A = T^T T$.

Prvky matice $T = (t_{ij})$:

- $t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j = 2, \dots, n,$
- $t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li}^2}, \quad i = 2, \dots, n$
- $t_{ij} = \frac{1}{t_{ii}}(a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li} t_{lj}), \qquad j > i \qquad t_{ij} = 0, \qquad j < i$

Příklad

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4\\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1\\
-x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= -8
\end{aligned}
$$

Croutova metoda

Rozklad třídiagonální matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} \\ a_{i,i-1} &= l_{i,i-1}, & i &= 2,3,\ldots,n \\ a_{ii} &= l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, & i &= 2,3,\ldots,n \\ a_{i,i+1} &= l_{ii}u_{i,i+1}, & i &= 1,2,\ldots,n-1. \end{aligned}$$

Věta

Nechť $A \in \mathcal{M}_n$ je třídiagonální matice s vlastnostmi:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{i,i-1}a_{i,i+1} \neq 0, & i = 2, 3, \dots, n-1, \\ |a_{11}| > |a_{12}|, & \\ |a_{ii}| \geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|, & i = 2, \dots, n-1, \\ |a_{nn}| > |a_{n,n-1}|. & \end{array}\right\} \begin{array}{l} A \text{ – řádkově diagon.} \\ \text{dominantní} \end{array}$$

Pak matice A je regulární a hodnoty l_{ii}, $i = 1, \dots, n$, vypočtené ze uvedených vztahů jsou různé od nuly.

Důsledek

Jsou-li splněny předpoklady věty, lze matici A rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice v uvedeném tvaru.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklad

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 2x_4 &= 1.5 \end{aligned}$$

Výpočet inverzní matice a determinantu

Výpočet inverzní matice k matici A je ekvivalentní řešení systému

$$AX = E,$$

Pak řešit systém $AX = E$ znamená řešit n systémů tvaru

$$A\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \quad A\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

K řešení lze užít některou z přímých metod (např. maticové rozklady).

Výpočet inverzní matice je třikrát „dražší" než řešení systému $Ax = \boldsymbol{b}$.

Výpočet determinantu:

GEM – pamatujeme si počet výměn řádků.

Výpočet inverzní matice při malé změně A: Shermanův-Morrisonův vzorec.

Nechť $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou vektory, $A \in \mathcal{M}_n$ je regulární matice. Pak

$$(A - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} = A^{-1} + \alpha(A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T A^{-1}),$$

kde

$$\alpha = \frac{1}{(1 - \boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u})},$$

za předpokladu $\boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u} \neq 1$.

Woodburyho vzorec.

Nechť $A, U, V \in \mathcal{M}_n$,

$$(A - UV^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(E - V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1},$$

za předpokladu, že $E - V^T A^{-1}U$ je regulární.

Stabilita, podmíněnost

Definice

Algoritmus pro řešení $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se nazývá *stabilní*, jestliže vypočtené řešení $\hat{\boldsymbol{x}}$ je takové, že

$$(A + \mathcal{E})\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b},$$

kde $\mathcal{E}$ a $\delta\boldsymbol{b}$ jsou malé; $\mathcal{E}$ se nazývá *chybová matice*.

Definice

Pro libovolnou přidruženou maticovou normu definujeme *číslo podmíněnosti* matice A vztahem

$$k(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|.$$

Řekneme, že *matice A je dobře podmíněna*, jestliže $k(A) \approx 1$ a *špatně podmíněna*, jestliže $k(A)$ je podstatně větší než 1.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|A\|_1 = 111$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 101 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\|_1 = 111$$

Tedy $k(A) = 111^2 = 12321$, A je špatně podmíněna.

Příklad – Hilbertova matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Pro $n = 10$ vzhledem k normě $\| \, . \, \|_1$ je $k(A) = 3{,}5353.10^{13}$.

Věta

Jestliže řešíme systém $Ax = \boldsymbol{b}$ v pohyblivé řádové čárce se zaokrouhlováním na t desetinných míst a $k(A) \approx 10^{\alpha}$, pak vypočtené řešení $\tilde{\boldsymbol{x}}$ je správné na $(t - \alpha - 1)$ desetinných míst.

A – pozitivně definitní matice

$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)} = \varrho(A)$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \le i \le n} \lambda_i$$

a

$$\|A^{-1}\|_2 = (\min_{1 \le i \le n} \lambda_i)^{-1}.$$

$$k(A) = \frac{\max \lambda_i}{\min \lambda_i}.$$