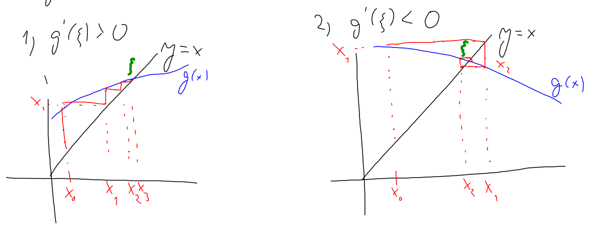
ξ - pevný bod - přitahující

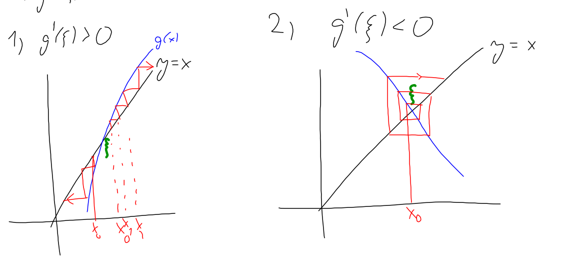
$|g'(\xi)|<1$



bře 1-9:57

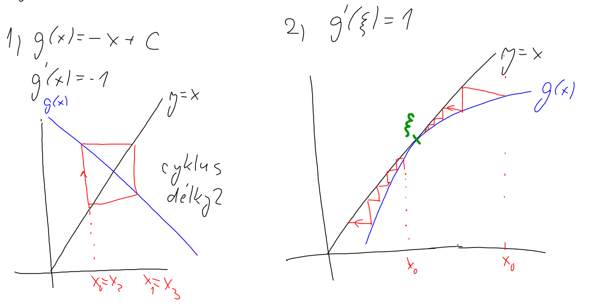
ξ - pevný bod - odpuzující

$|g'(\xi)|>1$



bře 1-10:22

$|g'(\xi)|=1$



bře 1-10:26

Př. Iterační funkce pro výpočet $\sqrt[3]{10}$

$f(x)=x^3-10=0 \qquad I=[2,3]$

$g(x)=x-\frac{f(x)}{K}=x-\frac{x^3-10}{K}$

2) $|g'(x)|\leq L<1 \ \forall x\in I$

$g'(x)=1-\frac{3x^2}{K}$

$-1<g'(x)=1-\frac{3x^2}{K}<1$

$1-\frac{3x^2}{K}<1 \Rightarrow K>0$

$-1<1-\frac{3x^2}{K} \Rightarrow \frac{3x^2}{K}<2$

$3x^2\leq 3\cdot 3^2=27 \ \forall x\in I$

$\frac{27}{K}<2 \Rightarrow K>13{,}5$

bře 1-10:35

1) $\forall x\in I: g(x)\in I$

$K=15$

$g(x)=x-\frac{x^3-10}{15}$

Lok. extrémy:

$g'(x)=1-\frac{3x^2}{15}=1-\frac{x^2}{5}=0$

$x^2=5 \quad x=\pm\sqrt{5}$

$g(2)=2-\frac{8-10}{15}=2+\frac{2}{15} \in I$

$g(3)=3-\frac{27-10}{15}=3-\frac{17}{15}=2-\frac{2}{15} \notin I$

bře 1-10:42

$K=20$

$g(x)=x-\frac{x^3-10}{20}$

$g(2)=2-\frac{-2}{20}=2{,}1\in I$

$g(3)=3-\frac{17}{20}=2+\frac{3}{20}\in I$

$g'(x)=1-\frac{3x^2}{20}=0$

$3x^2=20 \quad x=\pm\sqrt{\frac{20}{3}}$

$\sqrt{\frac{20}{3}}\in I$

$g\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)\doteq 2{,}221\in I$

Odhad: $\sqrt{\frac{20}{7}}<\sqrt{7}<2{,}7$

$g(2{,}7)=2{,}7-\frac{2{,}7^3-10}{20}$

bře 1-10:48

Volímek tak, aby lok. extrém neležel v I.

$g'(x) = 1 - \frac{3x^2}{k} = 0$

pro $k > 27$ je g monotonní na I

$3x^2 = k$

$x^2 = \frac{k}{3}$

$x = \sqrt{\frac{k}{3}} > 3 \Rightarrow \frac{k}{3} > 9$

$k > 27$

$k = 30 \Rightarrow$

$g(2) = 2 - \frac{-2}{30} = 2 + \frac{1}{15} \in I$

$g(3) = 3 - \frac{17}{30} = 2 + \frac{13}{30} \in I$

bře 1-11:02

$g(x) = x - \frac{x^3 - 10}{30}$

$x_0 = 2{,}5$

$x_1 \doteq 2{,}3125$

$x_2 \doteq 2{,}2336$

$x_3 \doteq 2{,}1955$

$\vdots$

$\xi \doteq 2{,}1544$

bře 1-11:06

Př: řád konvergence metody bisekce

$|e_{k+1}| \le \frac{1}{2} |e_k|$

$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^1} = \frac{1}{2} = C$

$p = 1$ Metoda řádu 1 – lineární

Metoda řádu 2:

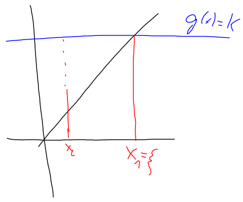
$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = C \neq 0 \Rightarrow |e_{k+1}| \approx |e_k|^2 \cdot C$

$|e_k| = O(h^n)$

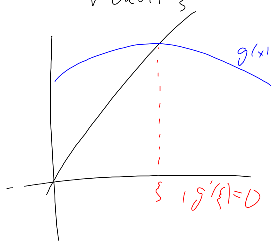
$|e_{k+1}| = O(h^{2n})$

bře 1-11:12

Řád konvergence



g je blízko konst. funkci v okolí ξ



bře 1-11:18

Řád Newtonovy metody

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $\xi: f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = g(\xi)$

$g'(x) = 1 - \frac{f'(x) f'(x) - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$, $g'(\xi) = 1 - \frac{(f'(\xi))^2 - \overbrace{f(\xi)}^{=0} f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 1 - 1 = 0$

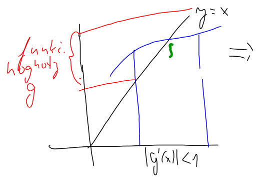
$g'(\xi) = 0 \Rightarrow$ N.m. je řádu alespoň 2.

bře 1-11:25

Konvergence N.m.:

$f'(\xi) \neq 0 \Rightarrow g'(\xi) = 0 < 1 \Rightarrow \xi$ je přitahující pevný bod.

Ex. okolí ξ: $|g'(x)| \le L < 1 \Rightarrow$ okolí se zobrazí do sebe $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ g je kontrakce na okolí ξ.

bře 1-11:30