Cvičení 8 – neparametrické testy o mediánech

Přehled vzorců pro jednovýběrové testy

Popis situace: $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr ze spojitého rozložení s mediánem $x_{0,50}$. Na hladině významnosti α testujeme H_0: $x_{0,50} = c$ proti H_1: $x_{0,50} \neq c$. Utvoříme rozdíly $Y_i = X_i - c$, $i = 1, ..., n$. Jsou-li některé rozdíly nulové, pak za n bereme jen počet nenulových hodnot. Postup při párovém testu: přejdeme k rozdílovému náhodnému výběru.

Znaménkový test: Zavedeme statistiku S_Z^+, která udává počet těch rozdílů, které jsou kladné. Kritický obor: $W = \langle 0, k_1 \rangle \cup \langle k_2, n \rangle$. Pro n = 6, 7, …, 20 a $\alpha = 0{,}05$ či 0,01 jsou tabelované kritické hodnoty k_1, k_2.
Asymptotická varianta testu: Lze použít pro n > 20. Platí-li H_0, pak

$$U_0 = \frac{S_Z^+ - E(S_Z^+)}{\sqrt{D(S_Z^+)}} = \frac{S_Z^+ - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \approx N(0,1).$$ Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Jednovýběrový Wilcoxonův test: Absolutní hodnoty $|Y_i|$ uspořádáme vzestupně a spočteme pořadí R_i. Statistika $S_W^+ = \sum_{Y_i>0} R_i^+$ je součet pořadí přes kladné hodnoty Y_i, statistika $S_W^- = \sum_{Y_i<0} R_i^-$ je součet pořadí přes záporné hodnoty Y_i. Přitom platí, že $S_W^+ + S_W^- = n(n+1)/2$. Testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-)$. Kritický obor: $W = \langle 0, k \rangle$. Pro n = 6, 7, …, 30 a $\alpha = 0{,}05$ či 0,01 jsou tabelované kritické hodnoty k.
Asymptotická varianta testu: Lze použít pro $n \geq 30$. Platí-li H_0, pak

$$U_0 = \frac{S_W^+ - E(S_W^+)}{\sqrt{D(S_W^+)}} = \frac{S_W^+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \approx N(0,1).$$ Krit. obor: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Dvouvýběrový Wilcoxonův test: $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ jsou dva nezávislé náhodné výběry ze dvou spojitých rozložení s mediány $x_{0,50}$ a $y_{0,50}$. Distribuční funkce se mohou lišit pouze posunutím. Testujeme hypotézu, že distribuční funkce těchto rozložení jsou shodné neboli mediány jsou shodné proti alternativě, že jsou rozdílné.
Všech n + m hodnot $X_1, ..., X_n$ a $Y_1, ..., Y_m$ uspořádáme vzestupně podle velikosti. Součet pořadí hodnot 1. výběru označíme T_1. Součet pořadí hodnot 2. výběru označíme T_2.
Vypočteme statistiky $U_1 = mn + n(n+1)/2 - T_1$, $U_2 = mn + m(m+1)/2 - T_2$. Platí $U_1 + U_2 = mn$.
Testová statistika = $\min(U_1,U_2)$, kritický obor $W = \langle 0, k \rangle$ Kritické hodnoty k jsou tabelované pro n = 1, …, 20, m = 1, …, 30, α. = 0,05. Značení: n = min{m,n} a m = max{m,n}.
Asymptotická varianta testu: Lze použít pro n, m > 20. Platí-li H_0, pak $U_0 = \frac{U_1 - \frac{mn}{2}}{\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}} \approx$ N(0,1). Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$.

Kruskalův–Wallisův test: Máme $r \geq 3$ nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1, \dots, n_r$. Pocházejí ze spojitých rozložení. Označme $n = n_1 + ... + n_r$. Chceme testovat hypotézu, že všechny tyto výběry pocházejí z téhož rozložení.

Všech n hodnot seřadíme do rostoucí posloupnosti a určíme pořadí každé hodnoty. Označme T_j součet pořadí hodnot z j-tého výběru, j = 1, ..., r (platí $T_1 + ... + T_r = n(n+1)/2$). Platí-li H_0, pak $Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{r} \frac{T_j^2}{n_j} - 3(n+1) \approx \chi^2(r-1)$. Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty)$.

Metody mnohonásobného porovnávání
Zamítneme-li hypotézu, že všechny náhodné výběry pocházejí z téhož rozložení, zajímá nás, které dvojice náhodných výběrů se liší na zvolené hladině významnosti. Testujeme H_0: k-tý a l-tý náhodný výběr pocházejí z téhož rozložení,
k, l = 1, .., r, $k \neq l$ proti H_1: aspoň jedna dvojice výběrů pochází z různých rozložení.

Neményiho metoda: Všechny výběry mají týž rozsah p (třídění je vyvážené).
- Vypočteme $|T_l - T_k|$.
- V tabulkách najdeme kritickou hodnotu (pro dané p, r, α).
- Pokud $|T_l - T_k| \geq$ tabelovaná kritická hodnota, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu, že l-tý a k-tý výběr pocházejí z téhož rozložení.

Obecná metoda mnohonásobného porovnávání
- Vypočteme $\left|\frac{T_l}{n_l} - \frac{T_k}{n_k}\right|$.
- Ve speciálních statistických tabulkách najdeme kritickou hodnotu $h_{KW}(\alpha)$. Při větších rozsazích výběrů je možno ji nahradit kvantilem $\chi^2_{1-\alpha}(r-1)$.
- Jestliže $\left|\frac{T_l}{n_l} - \frac{T_k}{n_k}\right| \geq \sqrt{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n_l} + \frac{1}{n_k}\right) n(n+1) h_{KW}(\alpha)}$, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu, že l-tý a k-tý výběr pocházejí z téhož rozložení.

Příklad 1.: Jsou naměřeny hodnoty 17, 23, 11, 20, 18, 32, 30, 24, 26, 17. Vypočtěte medián těchto 10 hodnot a na hladině významnosti 0,05 ověřte a) znaménkovým, b) jednovýběrovým Wilcoxonovým testem hypotézu, že odchylka vypočteného mediánu od hodnoty 17 je způsobena pouze náhodnými vlivy.

Příklad 2.: Skupina 11 studentů absolvovala paměťový test před a po speciálním tréninku paměti. Doby řešení testu před a po (v s): (87, 50), (61, 45), (98, 79), (90, 90), (93, 88), (74, 65), (83, 52), (72, 79), (81, 84), (75, 61), (83, 52).
Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že trénink neměl na výkony studentů žádný vliv. Použijte: a) párový t-test, b) párový Wilcoxonův test, c) párový znaménkový test.

Příklad 3.: Výkon 18 gymnastek byl ohodnocen stanovením jejich pořadí od nejlepší (pořadí 1) po nejslabší (pořadí 18). V hodnocené skupině bylo 11 žákyň trenérky A a 7 žákyň trenérky B. V tabulce je uvedeno pořadí žákyň obou trenérek:

A	1	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17
B	2	3	6	9	12	15	18				

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výukové metody obou trenérek jsou stejně účinné proti oboustranné alternativě.

Příklad 4.: (viz př. 9.6.3. ze skript) Výrobce koláčů v prášku má 4 nové recepty a chce zjistit, zda se jejich kvalita liší. Upekl proto 5 koláčů z každého druhu a dal je porotě k ohodnocení.
recept A: 72 88 70 87 71, recept B: 85 89 86 82 88, recept C: 94 94 88 87 89, recept D: 91 93 92 95 94.
Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že recepty se neliší. V případě zamítnutí nulové hypotézy zjistěte, které dvojice receptů se liší na asymptotické hladině významnosti 0,05.