Cvičení 7: Parametrické úlohy o více nezávislých náhodných výběrech

Úkol 1.: V jisté továrně se měřil čas, který potřeboval každý ze tří dělníků k uskutečnění téhož pracovního úkonu. Čas v minutách:

1. dělník: 3,6 3,8 3,7 3,5
2. dělník: 4,3 3,9 4,2 3,9 4,4 4,7
3. dělník: 4,2 4,5 4,0 4,1 4,5 4,4.

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výkony těchto tří dělníků jsou stejné. Zamítnete-li nulovou hypotézu, určete, výkony kterých dělníků se liší na dané hladině významnosti 0,05.

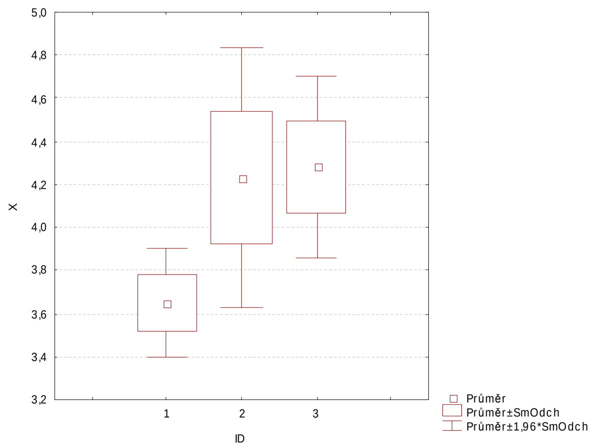
Návod:
Úloha vede na analýzu rozptylu jednoduchého třídění. Postupujeme podle skript Základní statistické metody, odstavec 8.1.
Načteme datový soubor cas_delniku.sta. Proměnná X obsahuje zjištěné časy, proměnná ID nabývá hodnoty 1 pro 1. dělníka, hodnoty 2 pro 2. dělníka a hodnoty 3 pro 3. dělníka.
Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Rozklad & jednofakt. ANOVA – Proměnné - Závislé X, Grupovací ID, OK, Kódy pro grupovací proměnné – Vše, OK, Výpočet: Tabulka statistik (zobrazí se průměry, směrodatné odchylky a rozsahy všech tří výběrů).

Rozkladová tabulka popisných statistik (cas_delniku.sta)
N=16 (V seznamu záv. prom. nejsou ChD)

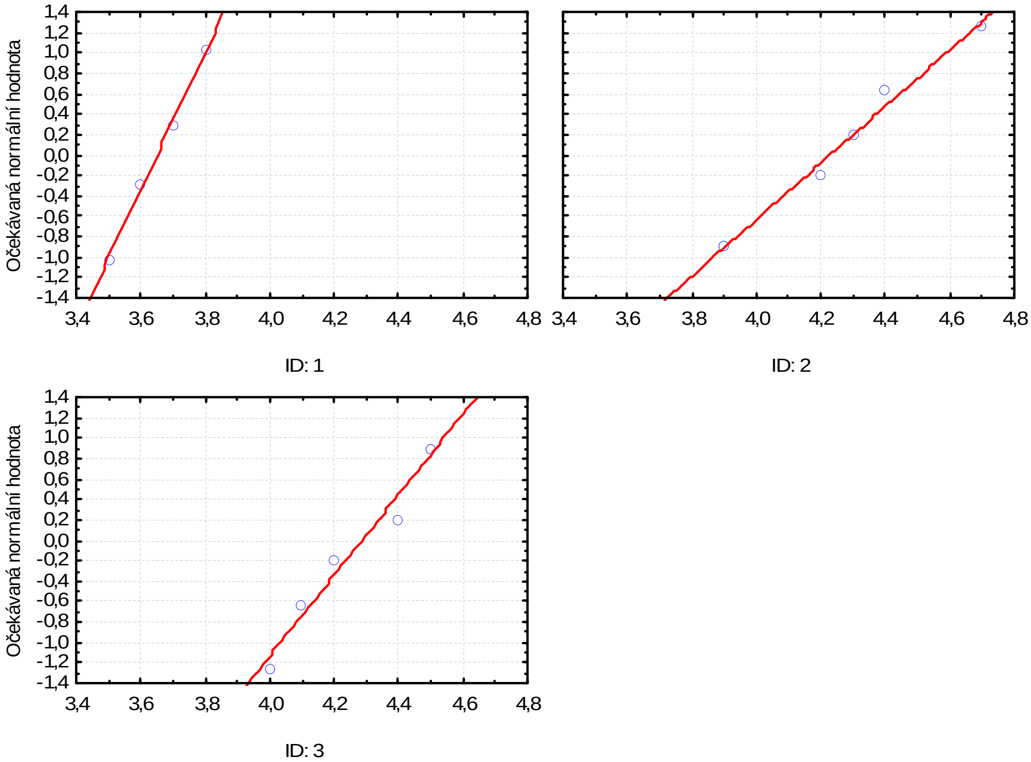
ID	X průměr	X N	X Sm.odch.
1	3,650000	4	0,129099
2	4,233333	6	0,307679
3	4,283333	6	0,213698
Vš.skup.	4,106250	16	0,353023

Komentář: Na uskutečnění daného pracovního úkonu potřebuje nejkratší čas 1. dělník. Podává také nejvyrovnanější výkony – směrodatná odchylka proměnné X je u něj nejmenší. Naopak nejpomalejší je 3. dělník.

Nyní vytvoříme krabicové diagramy: Návrat do Statistiky podle skupin – Kategoriz. krabicový graf (současné zobrazení krabicových diagramů pro všechny tři výběry)



Pomocí N-P plot orientačně posoudíme normalitu všech tří výběrů:
Návrat do Statistiky podle skupin – ANOVA & testy – Kategoriz. norm. pravd. grafy



Komentář: Ve všech třech případech se tečky jen málo odchylují od přímky, lze soudit, že data pocházejí z normálního rozložení.

Provedení testu o shodě rozptylů:
Návrat do Statistiky podle skupin – Leveneovy testy

	Leveneův test homogenity rozptylů (cas_delniku.sta) Označ. efekty jsou význ. na hlad. p < ,05000							
Proměnná	SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
X	0,042708	2	0,021354	0,183333	13	0,014103	1,514205	0,256356

Komentář: Testová statistika Levenova testu nabývá hodnoty 1,5142, stupně volnosti čitatele = 2, jmenovatele = 13, odpovídající p-hodnota = 0,256, tedy na hladině významnosti 0,05 se nezamítá hypotézu o shodě rozptylů.

Provedení testu o shodě středních hodnot:
Návrat do Statistiky podle skupin – Analýza rozptylu.

	Analýza rozptylu (cas_delniku.sta) Označ. efekty jsou význ. na hlad. p < ,05000							
Proměnná	SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
X	1,117708	2	0,558854	0,751667	13	0,057821	9,665327	0,002680

Komentář: Skupinový součet čtverců S_A = 1,1177, počet stupňů volnosti f_A = 2, reziduální součet čtverců S_E = 0,7517, počet stupňů volnosti f_E = 13, testová statistika $F_A = \frac{S_A/f_A}{S_E/f_E}$ nabývá hodnoty 9,6653, počet stupňů volnosti čitatele = 2, jmenovatele = 13, odpovídající p-hodnota = 0,00268, tedy na hladině významnosti 0,05 se zamítá hypotéza o shodě středních hodnot .

Provedení metody mnohonásobného porovnávání (Scheffého test – viz skripta Základní statistické metody, věta 8.2.2.1.):
Návrat do do Statistiky podle skupin – Post- hoc – Scheffëův test.

ID		Scheffeho test; proměn.:X (cas_delniku.sta) Označ. rozdíly jsou významné na hlad. p < ,05000		
		{1} M=3,6500	{2} M=4,2333	{3} M=4,2833
1	{1}		0,008391	0,004705
2	{2}	0,008391		0,937504
3	{3}	0,004705	0,937504	

Komentář: Tabulka obsahuje p-hodnoty pro testování hypotéz o shodě středních hodnot všech dvojic výběrů. Výsledek Scheffého metody ukazuje, že na hladině významnosti 0,05 se liší výkony dělníků (1,2), (1,3) a neliší se (2,3).

Úkol 2.: V cestovní kanceláři zkoumali u 609 náhodně vybraných klientů, o jaké ubytování měli zájem (varianty apartmán, bungalov, hotel, stan) a zjišťovali též pohlaví klienta.

Typ ubytování	apartmán	bungalov	hotel	stan
Počet žen	12	27	208	33
Počet mužů	100	41	36	152

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že rozdíly v typech ubytování mezi muži a ženami jsou způsobeny pouze náhodnými vlivy.

Návod:
Postupujeme podle skript Základní statistické metody, Věta 8.5.1.1. Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_4$ proti alternativní hypotéze H_1: aspoň jedna dvojice parametrů je různá.
Načteme datový soubor klienti_CK.sta. Proměnná POHLAVI obsahuje hodnotu 0 pro ženu, 1 pro muže. Proměnná TYP UBYTOVANI má hodnotu 1 pro apartmán, hodnotu 2 pro bungalov, hodnotu 3 pro hotel a hodnotu 4 pro stan.
Nejprve zjistíme podíly mužů v jednotlivých typech ubytování.
Statistiky – Základní statistiky/tabulky - Rozklad & jednofakt. ANOVA - OK - Proměnné - Závislé POHLAVI, Grupovaci TYP UBYTOVANI, OK, Kódy pro grupovací proměnné – Vše, OK – Popisné statistiky - Výpočet: Tabulka statistik – ponecháme zaškrtnuto N - OK.

typ ubytovani	pohlavi průměr	pohlavi N
apartmán	0,892857	112
bungalov	0,602941	68
hotel	0,147541	244
stan	0,821622	185
Vš.skup.	0,540230	609

Komentář: Vidíme, že z těch klientů, kteří se ubytovali v apartmánu, bylo 89,3 % mužů, mezi obyvateli bungalovů bylo 60,3 % mužů, z ubytovaných v hotelu bylo mužů pouze 14,7 % a z těch, kteří bydleli pod stanem, bylo 82,1 % mužů.

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace: $n_j m_* > 5$ pro všechna j = 1, ..., r. Vážený průměr m_* se nachází v posledním řádku výstupní Rozkladové tabulky popisných statistik. Jeho hodnotu okopírujeme do políček pro průměry relativní četnosti ubytovaných v jednotlivých typech ubytování, poslední řádek odstraníme a k tabulce přidáme jednu novou proměnnou, do jejíhož Dlouhého jména napíšeme =v2*v3.

typ ubytovani	pohlavi průměr	pohlavi N	NProm =v2*v3
apartmán	0,540230	112	60,505747
bungalov	0,540230	68	36,735632
hotel	0,540230	244	131,816092
stan	0,540230	185	99,942529

Komentář: Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Dále provedeme testování hypotézy o shodě parametrů čtyř alternativních rozložení. Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Kontingenční tabulky – OK - Specif. tabulky – List 1 POHLAVI, List 2 TYP UBYTOVANI, OK– Možnosti - Statistiky dvourozm tabulek - zaškrtneme Pearson & M-L Chi –square – Detailní výsledky – Detailní 2-rozm. tabulky

Statist.	Chí-kvadr.	sv	p
Pearsonův chí-kv.	267,6070	df=3	p=0,0000
M-V chí-kvadr.	294,9782	df=3	p=0,0000

Komentář: Testová statistika Q (viz skripta Základní statistické metody, vzorec 8.15.) se realizuje hodnotou 267,6070, počet stupňů volnosti je 3, odpovídající p-hodnota = 0,0000, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0 zamítáme. S rizikem omylu nejvýše 0,05 jsme tedy prokázali, že rozdíly v podílech klientů a klientek ubytovaných v různých typech ubytovacích zařízení nelze vysvětlit pouze náhodnými vlivy.

Nakonec provedeme metodu mnohonásobného porovnávání, abychom zjistili, které dvojice typů ubytování se liší na asymptotické hladině významnosti 0,05.
Návrat do Statistiky podle skupin – Post- hoc – Scheffếův test.

typ ubytovani	{1} M=,89286	{2} M=,60294	{3} M=,14754	{4} M=,82162
apartmán {1}		0,000016	0,000000	0,471207
bungalov {2}	0,000016		0,000000	0,000797
hotel {3}	0,000000	0,000000		0,000000
stan {4}	0,471207	0,000797	0,000000	

Komentář: Tabulka obsahuje p-hodnoty pro testování hypotéz o shodě středních hodnot všech dvojic výběrů. Výsledek Schefféo metody ukazuje, že z hlediska podílu mužů se na hladině významnosti 0,05 neliší pouze ubytování v apartmánu a ve stanu.

Příklady k samostatnému řešení

Příklad 1.: Studenti byli vyučováni předmětu za využití pěti pedagogických metod: tradiční způsob, programová výuka, audiotechnika, audiovizuální technika a vizuální technika.
Z každé skupiny byl vybrán náhodný vzorek studentů a všichni byli podrobeni témuž písemnému testu. Výsledky testu:

metoda	počet bodů							
tradiční	76,2	48,3	85,1	63,7	91,6	87,2		
programová	85,2	74,3	76,5	80,3	67,4	67,9	72,1	60,4
audio	67,3	60,1	55,4	72,3	40			
audiovizuální	75,8	81,6	90,3	78	67,8	57,6		
vizuální	50,5	70,2	88,8	67,1	77,7	73,9		

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že znalosti všech studentů jsou stejné a nezávisí na použité pedagogické metodě. V případě zamítnutí hypotézy zjistěte, které výběry se liší na hladině významnosti 0,05.

Řešení:
Načteme datový soubor pet_metod.sta. Proměnná BODY obsahuje dosažené počty bodů a proměnná METODA označení příslušné pedagogické metody.

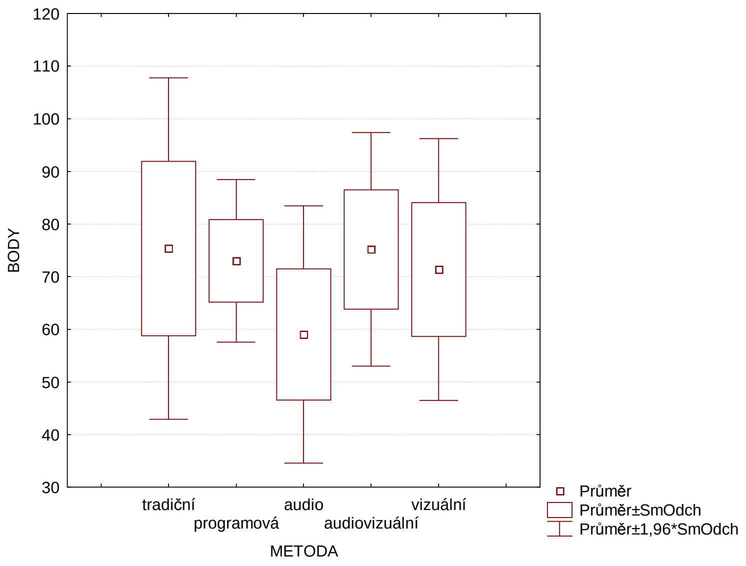
Nejprve vypočteme průměry, směrodatné odchylky a rozsahy všech tří výběrů:

Rozkladová tabulka popisných statistik (pet_metod.sta)
N=31 (V seznamu záv. prom. nejsou ChD)

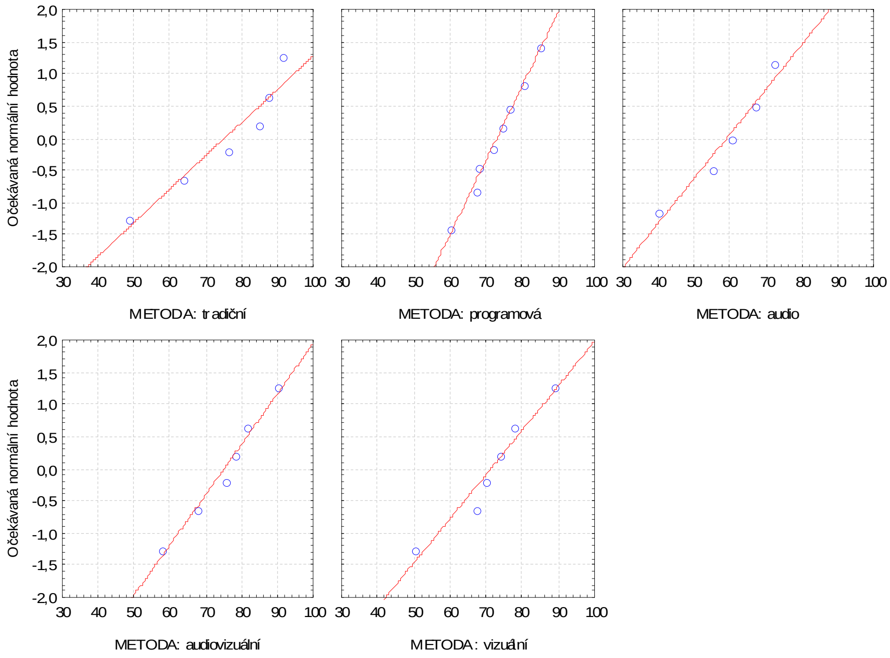
METODA	BODY průměr	BODY N	BODY Sm.odch.
tradiční	75,35000	6	16,53901
programová	73,01250	8	7,86501
audio	59,02000	5	12,45941
audiovizuální	75,18333	6	11,32862
vizuální	71,36667	6	12,69199
Vš.skup.	71,30968	31	12,69534

Komentář: Nejlepších výsledků dosahují studenti vyučovaní tradiční metodou, podávají však nejméně vyrovnané výkony (počty bodů v této skupině mají největší směrodatnou odchylku). Naopak nejhoršího výsledku dosáhli studenti vyučovaní audio metodou. Nejvyrovnanější výkony pozorujeme u studentů vyučovaných programovou metodou.

Vytvoříme krabicové diagramy:



Pomocí N-P grafů vizuálně posoudíme normalitu všech pěti výběrů:



Komentář: Ze vzhledu N-P grafů je patrné, že předpoklad normality je ve všech pěti případech oprávněný.

Provedeme Levenův test (testování homogenity rozptylů všech pěti výběrů)

	Leveneův test homogenity rozpylů (pet_metod.sta) Označ. efekty jsou význ. na hlad. p < ,05000							
Proměnná	SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
BODY	162,4883	4	40,62208	1289,544	26	49,59783	0,819029	0,524791

Komentář: Testová statistika F se realizuje hodnotou 0,819, počet stupňů volnosti čitatele = 4, jmenovatele = 26, odpovídající p-hodnota = 0,5248, na hladině významnosti 0,05 tedy nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů.

Budeme testovat hypotézu o shodě středních hodnot všech pěti výběrů:

Proměnná	Analýza rozptylu (pet_metod.sta) Označ. efekty jsou význ. na hlad. p < ,05000 SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
BODY	966,3737	4	241,5934	3868,773	26	148,7990	1,623623	0,198252

Komentář: Testová statistika F se realizuje hodnotou 1,6236, počet stupňů volnosti čitatele = 4, jmenovatele = 26, odpovídající p-hodnota = 0,1983, na hladině významnosti 0,05 tedy nezamítáme hypotézu o shodě středních hodnot. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5% se neprokázal rozdíl v účinnosti jednotlivých pedagogických metod.

Příklad 2.: Pan Novák může cestovat z místa bydliště do místa pracoviště třemi různými způsoby: tramvají (způsob A), autobusem (způsob B) a metrem s následným přestupem na tramvaj (způsob C). Máme k dispozici jeho naměřené časy cestování do práce v době ranní špičky (včetně čekání na příslušný spoj) v minutách:

způsob A: 32, 39, 42, 37, 34, 38:
způsob B: 30, 34, 28, 26, 32,
způsob C: 40, 37, 31, 39, 38, 33, 34

Pro všechny tři způsoby dopravy vypočtěte průměrné časy cestování. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že doba cestování do práce nezávisí na způsobu dopravy. V případě zamítnutí nulové hypotézy zjistěte, které způsoby dopravy do práce se od sebe liší na hladině významnosti 0,05.

Řešení:
Načteme datový soubor doby_cestovani.sta. Proměnná CAS obsahuje zjištěné doby cestování a proměnná ID označení příslušného způsoby dopravy.

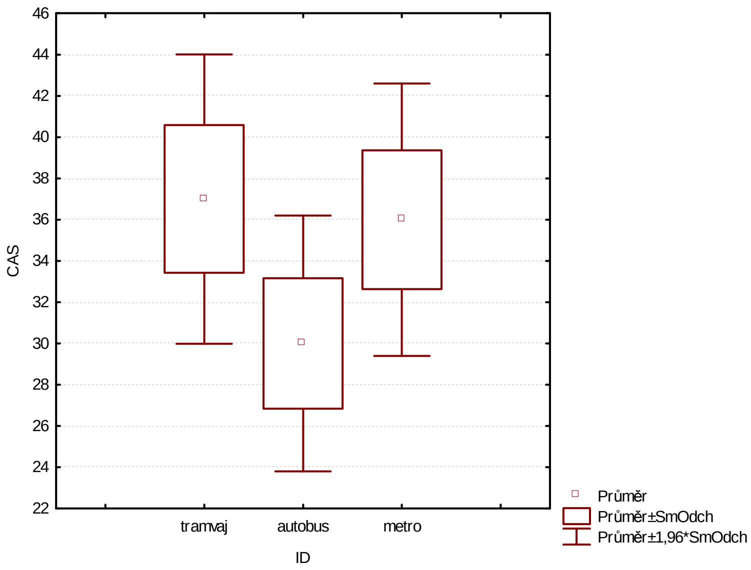
Nejprve vypočteme průměry, směrodatné odchylky a rozsahy všech tří výběrů:

Rozkladová tabulka popisných statistik (doby_cestovani.sta)
N=18 (V seznamu záv. prom. nejsou ChD)

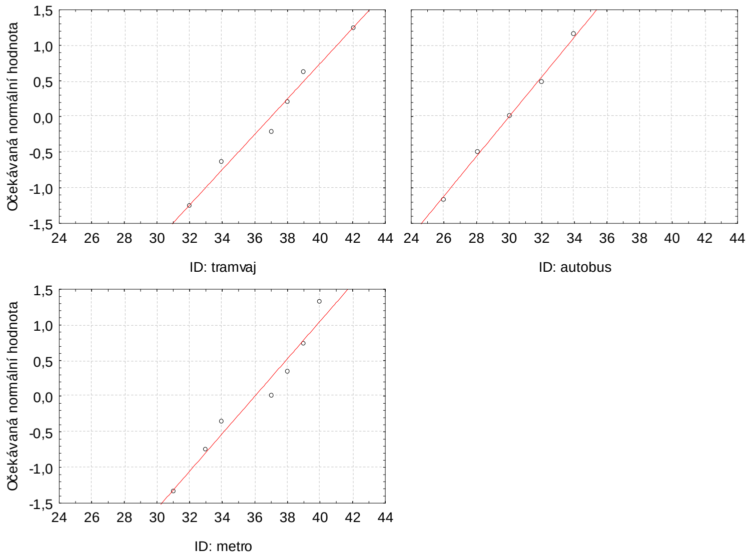
ID	CAS průměr	CAS N	CAS Sm.odch.
tramvaj	37,00000	6	3,577709
autobus	30,00000	5	3,162278
metro	36,00000	7	3,366502
Vš.skup.	34,66667	18	4,379095

Komentář: Nejkratší průměrnou dobu do zaměstnání pan Novák cestuje, když použije autobus, naopak nejdéle cestuje tramvají Variabilita dob jednotlivých způsobů cestování je vcelku vyrovnaná.

Vytvoříme krabicové diagramy:



Pomocí N-P grafů vizuálně posoudíme normalitu všech tří výběrů:



Komentář: Ze vzhledu N-P grafů je patrné, že předpoklad normality je ve všech třech případech oprávněný.

Provedeme Levenův test (testování homogenity rozptylů všech tří výběrů)

	Leveneův test homogenity rozpylů (doby_cestovani.sta) Označ. efekty jsou význ. na hlad. p < ,05000							
Proměnná	SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
CAS	0,609524	2	0,304762	43,39048	15	2,892698	0,105356	0,900665

Komentář: Testová statistika F se realizuje hodnotou 0,1054, počet stupňů volnosti čitatele = 2, jmenovatele = 15, odpovídající p-hodnota = 0,9007, na hladině významnosti 0,05 tedy nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů.

Budeme testovat hypotézu o shodě středních hodnot všech tří výběrů:

Proměnná	Analýza rozptylu (doby_cestovani.sta) Označ. efekty jsou význ. na hlad. p < ,05000 SČ efekt	SV efekt	PČ efekt	SČ chyba	SV chyba	PČ chyba	F	p
CAS	154,0000	2	77,00000	172,0000	15	11,46667	6,715116	0,008267

Komentář: Testová statistika F se realizuje hodnotou 6,7151, počet stupňů volnosti čitatele = 2, jmenovatele = 15, odpovídající p-hodnota = 0,0083, na hladině významnosti 0,05 tedy zamítáme hypotézu o shodě středních hodnot. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5% se prokázal rozdíl v dobách cestování pana Nováka do zaměstnání autobusem, tramvají a metrem.

Scheffého metodou mnohonásobného porovnávání zjistíme, které dvojice způsobů cestování do zaměstnání se liší na hladině významnosti 0,05:

ID	Scheffeho test; proměn.:CAS (doby_cestovani.sta) Označ. rozdíly jsou významné na hlad. p < ,05000 {1} M=37,000	{2} M=30,000	{3} M=36,000
tramvaj {1}		0,013410	0,869732
autobus {2}	0,013410		0,028046
metro {3}	0,869732	0,028046	

Komentář: Z tabulky vyplývá, že s rizikem omylu nejvýše 5% se neliší pouze cestování tramvají a metrem.

Příklad 3.: U 856 žáků ZŠ bylo zjišťováno celkové IQ (proměnná IQ_CELK). Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že pravděpodobnost výskytu dítěte s nadprůměrným IQ_CELK (tj. nad 100 bodů) je stejná ve skupinách matek se základním, středoškolským a vysokoškolským vzděláním (proměnná VZDEL_M).

Řešení:

Máme tři nezávislé náhodné výběry, j-tý pochází z rozložení A(ϑ_j), j = 1, 2, 3. Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3$.

$n_1 = 361$, $n_2 = 386$, $n_3 = 109$, $n = 856$

$m_1 = 111/361 = 30{,}75\%$, $m_2 = 227/386 = 58{,}81\%$, $m_3 = 85/109 = 77{,}98\%$, $m_* = (111+227+85)/856 = 423/856 = 49{,}42\%$.

Podmínky dobré aproximace:

$$361 \cdot \frac{423}{856} = 178{,}39,\ 386 \cdot \frac{423}{856} = 190{,}75,\ 109 \cdot \frac{423}{856} = 53{,}86$$

Testová statistika

$$Q = \frac{1}{M_*(1-M_*)} \sum_{j=1}^{r} n_j M_j^2 - n\frac{M_*}{1-M_*} = 99{,}53$$

Kritický obor: $W = \langle \chi^2_{0,95}(2), \infty) = \langle 5{,}991, \infty)$.

Protože testové kritérium se realizuje v kritickém oboru, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.
Metoda mnohonásobného porovnávání prokázala, že na asymptotické hladině významnosti 0,05 se liší všechny tři skupiny.