

Cvičení 1.

Úkol 1.: Použijte funkci `simulace_DNV.m` pro příklad z přednášky (Opakovaně vypisovaných výběrových řízení se účastní vždy 4 firmy, označme je A, B, C, D. Pravděpodobnost, že jejich nabídky budou vybrány, jsou postupně 0,2; 0,3; 0,4 a 0,1.) Pro různá n (např. $n = 10, 100, 200, 500, 1000, 2000$) simulujte výsledky konkurzů. Pokaždé vytvořte tabulku rozložení četností variant 1, 2, 3, 4 (funkce `tabulate`) a sledujte, jak s rostoucím n se relativní četnosti přibližují k pravděpodobnostem těchto variant, tj. k číslům 0,2; 0,3; 0,4; 0,1.

Nepovinný úkol: Pokuste se výsledky znázornit graficky, tedy prostřednictvím čtyř grafů, kde na vodorovné ose bude n a na svislé ose relativní četnost příslušné varianty.

Nepovinný úkol: Hráči šachu, označme je A a B, jsou stejně silní a hrají spolu tři partie. Nerozhodný výsledek partie je vyloučen a výsledky jsou nezávislé. Náhodná veličina X udává počet výher hráče A. Pomocí funkce `simulace_DNV` simulujte výsledky n -násobného opakování těchto tří partií (např. $n = 20, 100, 200, 500$). Pokaždé vytvořte tabulku rozložení četností variant 0,1,2,3 a získané relativní četnosti porovnejte s pravděpodobnostmi variant 0,1,2,3.

Návod: Vektor rozložení pravděpodobností diskrétní náhodné veličiny X lze získat pomocí funkce `binopdf`.

Úkol 2.: Použijte funkci `sim_expon.m` pro různé hodnoty parametru λ (např. $\lambda = 0,1; 0,5; 1; 2$) a pro různá n (např. $n = 10, 100, 200, 500, 1000, 2000$). Pomocí funkce `hist.m` vykreslete (aspoň pro některé kombinace parametrů n, λ) histogramy těchto realizací. Upozornění: V MATLABu lze realizace náhodné veličiny s exponenciálním rozložením generovat též pomocí funkce `expnd`.

Úkol 3.: Pomocí funkcí `clv.m`, `clv_polynom.m` a `BM_transformace.m` generujte pro různé parametry μ, σ a různá n realizace normálně rozložené náhodné veličiny.

Úkol 4.: Pro parametry $\mu = 0, \sigma = 1, n = 1000$ vygenerujte pomocí tří výše uvedených funkcí `clv.m`, `clv_polynom.m` a `BM_transformace.m` realizace normálně rozložené náhodné veličiny. Pokaždé vypočítejte průměr a směrodatnou odchylku a porovnejte s teoretickými hodnotami 0 a 1. Vypočítejte rovněž minimum a maximum.

Nepovinný úkol: Pro realizace získané v úkolu 4 vytvořte graf empirické distribuční funkce a porovnejte ho s grafem distribuční funkce rozložení $N(0,1)$. Odlišnost empirické distribuční funkce od teoretické distribuční funkce posuďte pomocí součtu kvadrátů odchylek příslušných funkčních hodnot.

Návod:

Hodnoty proměnné realizace setřídíme vzestupně a uložíme do proměnné x : `x=sort(realizace);`

Do proměnné $y1$ uložíme hodnoty empirické distribuční funkce: `y1=[1:n]'/n;`

Do proměnné $y2$ uložíme hodnoty distribuční funkce rozložení $N(0,1)$: `y2=normcdf(x,0,1);`

Do jednoho obrázku nakreslíme graf obou funkcí: `plot(x,y1,x,y2).`

Součet kvadrátů odchylek vypočteme takto: `(y1-y2)'*(y1-y2)`

Úkol 5.: Je známo, že příjmy obyvatel lze modelovat pomocí exponenciálního rozložení. Necht' náhodná veličina X udává měsíční příjem náhodně vybraného zaměstnance. Předpokládejme, že $X \sim \text{Ex}(\lambda)$. Podle údajů ČSÚ dosáhla průměrná hrubá mzda v ČR ve 2. čtvrtletí roku 2017 hodnoty 29 346 Kč, mediánová mzda byla 24 896 Kč.

a) Pomocí funkce `sim_expon` nebo `exprnd` náhodně vygenerujte příjmy $n = 1000, 10\,000$ a $100\,000$ osob (střední hodnotu volte 29 346) a vytvořte histogram vygenerovaných příjmů. V MATLABu: `r = exprnd(29346,n,1); hist(r)`

b) Pro každou sérii simulací vypočtete průměrný příjem a vypočtete medián příjmů. Zjištěné hodnoty porovnejte s teoretickými hodnotami: střední hodnota = 29 346 Kč, medián = 20 341 Kč.

Poznámka: Výpočet mediánu:

$$0,5 = \Phi(x_{0,5}) = 1 - e^{-\lambda x_{0,5}} \Rightarrow x_{0,5} = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - 0,5) = \frac{\ln 2}{\lambda} = 29346 \cdot \ln 2 = 20341$$

V MATLABu: `m = mean(r)`

`x50 = median(r)`

c) Pro každou sérii simulací zjistěte, kolik procent osob bude mít podprůměrné příjmy. Zjištěnou hodnotu porovnejte s teoretickou hodnotou 63,2 %.

Poznámka: Výpočet podílu osob s podprůměrnými příjmy:

$$P\left(X < \frac{1}{\lambda}\right) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-1} = 0,6321$$

V MATLABu:

`pocet=sum(r<m);`

`procento=100*pocet/n`