Cvičení 10

Pravděpodobnostní vytvořující funkce

Definice: Nechť X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $P(X=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$. Pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X je dána vztahem: $g_X(z)=E(z^X)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, kde $|z|\le 1$.

Vlastnosti:

a) $p_k = \left.\frac{g_X^{(k)}(z)}{k!}\right|_{z=0}$ pro k = 0, 1, 2, …

b) $E(X)=\frac{d}{dz}g_X(z)\Big|_{z=1}$, $D(X)=\left.\frac{d^2}{dz^2}g_X(z)\right|_{z=1}+E(X)-[E(X)]^2$.

c) X_1, ..., X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$
$\Rightarrow\ g_Y(z)=g_{X_1}(z)\cdot\ldots\cdot g_{X_n}(z)$.

d) X_1, ..., X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, i = 1, 2, ..., n.

Pak transformovaná náhodná veličina $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ má pravděpodobnostní funkci

$P(Y=k)=\begin{cases} \{p_k\}^{n*} \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

e) Nechť X_1, X_2, ... je posloupnost stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i=k)=\begin{cases} p_k \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, i = 1, 2, ... Nechť N je celočíselná nezáporná náhodná veličina nezávislá na X_1, X_2, ... s pravděpodobnostní funkcí $P(N=n)=\begin{cases} q_n \text{ pro } n=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.
Pak náhodná veličina $S = X_1 + ... + X_N$ (tj. součet náhodného počtu náhodných veličin) má pravděpodobnostní funkci $P(S=k)=h_k=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} q_n\{p_k\}^{n*} \text{ pro } k=0,1,2,... \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$.

f) Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny $S = X_1 + ... + X_N$ platí:
$g_S(z) = g_N(g_X(z))$.

g) $E(S) = E(N)\mu$, $D(S) = D(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2$, kde $\mu = E(X_i)$, $\sigma^2 = D(X_i)$, i = 1, 2, …

Příklad 1.: Celočíselná nezáporná náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci $P(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{k(k+1)} \text{ pro } k=1,2,\dots\\ 0 \text{ jinak}\end{cases}$. Najděte její pravděpodobnostní vytvořující funkci.

Návod: Použijte rozklad na parciální zlomky a Taylorův rozvoj funkce $\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$.

Řešení: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}+\frac{-1}{k+1}$,

$$g_X(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\frac{-1}{k+1}\right)z^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}-\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{k+1}=-\ln(1-z)-\frac{1}{z}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{z^j}{j}=$$

$$=-\ln(1-z)-\frac{1}{z}\left(\sum_{j=2}^{\infty}\frac{z^j}{j}-z\right)=-\ln(1-z)+\frac{1}{z}[\ln(1-z)+z]=-\ln(1-z)+\frac{\ln(1-z)}{z}+1=$$

$$=1+\frac{1-z}{z}\ln(1-z)$$

Výsledek: $g_X(z)=1+\frac{1-z}{z}\ln(1-z)$

Příklad 2.: Pomocí pravděpodobnostních vytvořujících funkcí najděte střední hodnoty a rozptyly těchto rozložení: a) $A(\vartheta)$, b) $Bi(n,\vartheta)$, c) $Ge(\vartheta)$.

Řešení:

Ad a) $g_X(z) = 1 - \vartheta + z\vartheta$, $E(X)=\frac{d}{dz}g_X(z)\Big|_{z=1}=\vartheta$

$$D(X)=\frac{d^2}{dz^2}g_X(z)\Big|_{z=1}+E(X)-[E(X)]^2=\vartheta-\vartheta^2=\vartheta(1-\vartheta)$$

Ad b) $g_X(z) = (1 - \vartheta + z\vartheta)^n$, $E(X)=\frac{d}{dz}g_X(z)\Big|_{z=1}=n(1-\vartheta+z\vartheta)^{n-1}\vartheta\Big|_{z=1}=n\vartheta$

$$D(X)=\frac{d^2}{dz^2}g_X(z)\Big|_{z=1}+E(X)-[E(X)]^2=n(n-1)(1-\vartheta+z\vartheta)^{n-2}\vartheta^2\Big|_{z=1}+n\vartheta-n^2\vartheta^2=$$

$$=n(n-1)\vartheta^2+n\vartheta-n^2\vartheta^2=n\vartheta(1-\vartheta)$$

Ad c) $g_X(z)=\frac{\vartheta}{1-z(1-\vartheta)}$, $E(X)=\frac{d}{dz}g_X(z)\Big|_{z=1}=\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{[1-z(1-\vartheta)]^2}\Big|_{z=1}=\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{\vartheta^2}=\frac{1-\vartheta}{\vartheta}$

$$D(X)=\frac{d^2}{dz^2}g_X(z)\Big|_{z=1}+E(X)-[E(X)]^2=\frac{2\vartheta(1-\vartheta)^2}{[1-z(1-\vartheta)]^3}\Big|_{z=1}-\frac{1-\vartheta}{\vartheta}+\left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)^2=$$

$$=\frac{2\vartheta(1-\vartheta)^2}{\vartheta^2}-\frac{1-\vartheta}{\vartheta}+\left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)^2=\frac{1-\vartheta}{\vartheta^2}$$

Výsledek: ad a) $E(X)=\vartheta, D(X)=\vartheta(1-\vartheta)$, ad b) $E(X)=n\vartheta, D(X)=n\vartheta(1-\vartheta)$, ad c) $E(X)=\frac{1-\vartheta}{\vartheta}, D(X)=\frac{1-\vartheta}{\vartheta^2}$

Příklad 3.: Provedeme tři nezávislé pokusy, v nichž sledujeme nastoupení úspěchu. V prvním pokusu nastává úspěch s pravděpodobností 0,5, ve druhém 0,2 a ve třetím 0,1. Najděte

pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y, která udává počet úspěchů v těchto třech pokusech.
a) Vyjádřete pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y.
b) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y.
c) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce odvoďte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y.

Řešení:
Ad a) $X \sim A(\vartheta) \Rightarrow g_X(z) = 1 - \vartheta + z\vartheta$, $X_1 \sim A(0{,}5)$, $X_2 \sim A(0{,}2)$, $X_3 \sim A(0{,}1)$

$$g_Y(z) = g_{X_1}(z)g_{X_2}(z)g_{X_3}(z) = (0{,}5 + 0{,}5z)(0{,}8 + 0{,}2z)(0{,}9 + 0{,}1z) = 0{,}36 + 0{,}49z + 0{,}14z^2 + 0{,}01z^3$$

Ad b) $E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z)\Big|_{z=1} = 0{,}49 + 0{,}28 + 0{,}03 = 0{,}8$

$$D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z)\Bigg|_{z=1} + E(X) - [E(X)]^2 = 0{,}28 + 0{,}06 + 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}5$$

Ad c) $p_0 = g_Y(0) = 0{,}36$, $p_1 = g'_Y(0) = 0{,}49$, $p_2 = \frac{g''_Y(0)}{2} = 0{,}14$, $p_3 = \frac{g'''_Y(0)}{6} = 0{,}01$

Výsledek:
Ad a) $g_Y(z) = 0{,}36 + 0{,}49z + 0{,}14z^2 + 0{,}01z^3$
Ad b) $E(Y) = 0{,}8, D(Y) = 0{,}5$
Ad c) $p_0 = 0{,}36$, $p_1 = 0{,}49$, $p_2 = 0{,}14$, $p_3 = 0{,}01$

Příklad 4.: Předpokládejme, že počet vajíček, která snese slepice za sezónu, je náhodná veličina N ~ Po(λ). Pravděpodobnost, že se z libovolného vajíčka vylíhne kuře, je ϑ. Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce odvoďte rozložení náhodné veličiny S, která udává počet kuřat vylíhlých za sezónu z vajíček dané slepice. Pomocí vzorce z bodu (g) vypočtěte též E(S) a D(S).
Řešení: X_i … počet kuřat vylíhlých z i-tého vajíčka, $X_i \sim A(\vartheta)$, $g_X(z) = 1 - \vartheta + z\vartheta$
N … počet vajíček snesených za sezónu, N ~ Po(λ), $g_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$
S … počet vylíhlých kuřat, $S = X_1 + ... + X_N$, $g_S(z) = g_N(g_X(z)) = e^{\lambda(1-\vartheta+z\vartheta-1)} = e^{\lambda\vartheta(z-1)}$
$E(S) = E(N)E(X) = \lambda\vartheta$, $D(S) = D(N)[E(X)]^2 + E(N)D(X) = \lambda\vartheta^2 + \lambda\vartheta(1 - \lambda\vartheta) = \lambda\vartheta$
Výsledek: $S \sim Po(\lambda\vartheta)$, $E(S) = D(S) = \lambda\vartheta$