

# Cvičení 11

## Galtonův – Watsonův proces větvení

**Definice:** Necht' jedinec tvořící nultou generaci může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům (potomkům) první generace. Analogicky každý jedinec z první generace může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům druhé generace atd. Přitom předpokládáme, že

a) počet potomků  $X$  náhodně zvoleného jedince má pravděpodobnostní funkci

$$P(X = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \text{ která nezávisí na zvoleném jedinci ani na generaci, do níž}$$

přísluší;

b) jedinci z dané generace dávají vzniknout svým potomkům vzájemně nezávisle.

Označme  $X_n$  počet jedinců  $n$ -té generace (speciálně je  $X_0 = 1$ ). Za uvedených předpokladů posloupnost náhodných veličin  $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$  tvoří homogenní markovský řetězec s množinou stavů  $J = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Tento řetězec se nazývá Galtonův – Watsonův proces větvení.

**Vlastnosti:**

1. Matice přechodu má tvar 
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ p_0^2 & 2p_0p_1 & p_1^2 + 2p_0p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ tj. } \forall i, j \in J : p_{ij} = \{p_j\}_{i^*}.$$

2. Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny  $X_{n+1}$  platí:

$$g_{X_{n+1}}(z) = \begin{cases} g_{X_n}(g_X(z)) & \text{pro } n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{pro } n = 0 \end{cases}, \text{ kde } g_X(z) \text{ je pravděpodobnostní vytvořující funkce}$$

náhodné veličiny  $X_1$ .

3. Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $X_n$  platí:

$$E(X_n) = \mu^n, \quad D(X_n) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 \mu^{n-1} (\mu^n - 1)}{\mu - 1} & \text{pro } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{pro } \mu = 1 \end{cases}, \text{ kde } \mu = E(X_1), \sigma^2 = D(X_1)$$

4. Pro pravděpodobnost vyhynutí v  $n$ -té generaci platí:  $P(X_n = 0) = q_n = g_{X_n}(0)$

5. Pro limitní pravděpodobnost vyhynutí platí:

a) Je-li  $\mu \leq 1$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ .

b) Je-li  $\mu > 1$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \xi$ , kde  $\xi \in (0, 1)$  je nejmenší kladný kořen rovnice  $z = g_X(z)$ .

**Příklad:** Uvažme G – W proces, v němž  $p_0 = \frac{1}{5}, p_1 = \frac{1}{5}, p_2 = \frac{3}{5}, p_k = 0, k = 3, 4, \dots$

- Vypočtete prvky matice přechodu  $\mathbf{P}$  pro  $i = 0, 1, 2$  a  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ .
- Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci počtu jedinců ve 2. generaci.
- Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce počtu jedinců ve 2. generaci vypočtete pravděpodobnostní funkci.
- Najděte střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců ve 2. generaci.
- Vypočtete limitní pravděpodobnost vyhynutí.

**Řešení:**

Ad a)  $\forall i, j \in J : p_{ij} = \{p_j\}^{i*}$

Nultý řádek matice přechodu má prvky 1, 0, 0, 0, 0, ...

1. řádek matice přechodu má prvky  $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, \dots$

Odvodíme prvky 2. řádku matice přechodu:

$$p_{20} = \{p_0\}^{2*} = p_0^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$p_{21} = \{p_0, p_1\}^{2*} = \{p_0, p_1\} * \{p_0, p_1\} = p_0 p_1 + p_0 p_1 = 2p_0 p_1 = 2\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{2}{25}$$

$$\begin{aligned} p_{22} &= \{p_0, p_1, p_2\}^{2*} = \{p_0, p_1, p_2\} * \{p_0, p_1, p_2\} = p_0 p_2 + p_1^2 + p_2 p_0 = p_1^2 + 2p_0 p_2 = \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{23} &= \{p_0, p_1, p_2, p_3\}^{2*} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\} * \{p_0, p_1, p_2, p_3\} = p_0 p_3 + p_1 p_2 + p_2 p_1 + p_3 p_0 = |p_3 = 0| = \\ &= 2p_1 p_2 = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{24} &= \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}^{2*} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\} * \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\} = p_0 p_4 + p_1 p_3 + p_2^2 + p_3 p_1 + p_4 p_0 = \\ &= |p_3 = 0, p_4 = 0| = p_2^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

Matice přechodu má tedy tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{25} & \frac{2}{25} & \frac{7}{25} & \frac{6}{25} & \frac{9}{25} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ad b) Abychom odvodili pravděpodobnostní vytvořující funkci  $g_{x_2}(z)$ , musíme znát  $g_x(z)$ .

$$g_x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} z + \frac{3}{5} z^2, \text{ tedy}$$

$$g_{X_2}(z) = g_X(g_X(z)) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{5}z + \frac{3}{5}z^2 \right) + \frac{3}{5} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{5}z + \frac{3}{5}z^2 \right)^2 = \dots =$$

$$= \frac{33}{125} + \frac{11}{125}z + \frac{36}{125}z^2 + \frac{18}{125}z^3 + \frac{27}{125}z^4$$

$$\text{Ad c) } P(X_2 = 0) = g_{X_2}(0) = \frac{33}{125},$$

$$P(X_2 = 1) = \left. \frac{d}{dz} g_{X_2}(z) \right|_{z=0} = \frac{11}{125} + 2 \cdot \frac{36}{125}z + 3 \cdot \frac{18}{125}z^2 + 4 \cdot \frac{27}{125}z^3 \Big|_{z=0} = \frac{11}{125},$$

$$P(X_2 = 2) = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} g_{X_2}(z) \right|_{z=0} = \frac{1}{2} \left( 2 \cdot \frac{36}{125} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{18}{125}z + 4 \cdot 3 \cdot \frac{27}{125}z^2 \right) \Big|_{z=0} = \frac{36}{125}$$

$$P(X_2 = 3) = \left. \frac{1}{6} \frac{d^3}{dz^3} g_{X_2}(z) \right|_{z=0} = \frac{1}{6} \left( 3 \cdot 2 \cdot \frac{18}{125} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{27}{125}z \right) \Big|_{z=0} = \frac{18}{125}$$

$$P(X_2 = 4) = \left. \frac{1}{24} \frac{d^4}{dz^4} g_{X_2}(z) \right|_{z=0} = \frac{1}{24} \left( 4 \cdot 3 \cdot \frac{27}{125} \right) \Big|_{z=0} = \frac{27}{125}$$

$$\text{Ad d) } E(X_2) = 0 \cdot \frac{33}{125} + 1 \cdot \frac{11}{125} + 2 \cdot \frac{36}{125} + 3 \cdot \frac{18}{125} + 4 \cdot \frac{27}{125} = \frac{245}{125} = \frac{49}{25} = 1,96$$

$$D(X_2) = E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 = \dots = \frac{1344}{625} = 2,1504$$

Střední hodnotu a rozptyl veličiny  $X_2$  můžeme též spočítat pomocí vztahů

$$E(X_n) = \mu^n, \quad D(X_n) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 \mu^{n-1} (\mu^n - 1)}{\mu - 1} & \text{pro } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{pro } \mu = 1 \end{cases}, \quad \text{kde } \mu = E(X_1), \sigma^2 = D(X_1)$$

Nejprve spočteme střední hodnotu  $\mu$  počtu potomků jedince nulté generace:

$$\mu = E(X) = 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$\text{A poté rozptyl: } \sigma^2 = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{3}{5} - \frac{49}{25} = \frac{65 - 49}{25} = \frac{16}{25}.$$

Nyní dosadíme do vzorce  $E(X_2) = \mu^2 = \frac{49}{25} = 1,96$  a do vzorce

$$D(X_2) = \frac{\sigma^2 \mu (\mu^2 - 1)}{\mu - 1} = \frac{\frac{16}{25} \cdot \frac{7}{5} \left( \frac{49}{25} - 1 \right)}{\frac{7}{5} - 1} = \dots = \frac{1344}{625} = 2,1504$$

Vidíme, že oběma způsoby výpočtu dospějeme k témuž výsledku.

Ad e)

Protože  $\mu = 1,4 > 1$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \xi$ , kde  $\xi \in (0,1)$  je nejmenší kladný kořen rovnice

$z = g_x(z) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}z + \frac{3}{5}z^2$ . Sešením této kvadratické rovnice zjistíme, že limitní

pravděpodobnost vyhynutí je  $\frac{1}{3}$ .