

Cvičení 11

Galtonův – Watsonův proces větvení

Definice: Necht' jedinec tvořící nultou generaci může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům (potomkům) první generace. Analogicky každý jedinec z první generace může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům druhé generace atd. Přitom předpokládáme, že

a) počet potomků X náhodně zvoleného jedince má pravděpodobnostní funkci

$$P(X = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \text{ která nezávisí na zvoleném jedinci ani na generaci, do níž}$$

přísluší;

b) jedinci z dané generace dávají vzniknout svým potomkům vzájemně nezávisle.

Označme X_n počet jedinců n -té generace (speciálně je $X_0 = 1$). Za uvedených předpokladů posloupnost náhodných veličin $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ tvoří homogenní markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0, 1, 2, \dots\}$. Tento řetězec se nazývá Galtonův – Watsonův proces větvení.

Vlastnosti:

1. Matice přechodu má tvar
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ p_0^2 & 2p_0p_1 & p_1^2 + 2p_0p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \text{ tj. } \forall i, j \in J : p_{ij} = \{p_j\}_{i^*}.$$

2. Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X_{n+1} platí:

$$g_{X_{n+1}}(z) = \begin{cases} g_{X_n}(g_X(z)) & \text{pro } n = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{pro } n = 0 \end{cases}, \text{ kde } g_X(z) \text{ je pravděpodobnostní vytvořující funkce}$$

náhodné veličiny X_1 .

3. Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X_n platí:

$$E(X_n) = \mu^n, \quad D(X_n) = \begin{cases} \frac{\sigma^2 \mu^{n-1} (\mu^n - 1)}{\mu - 1} & \text{pro } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 & \text{pro } \mu = 1 \end{cases}, \text{ kde } \mu = E(X_1), \sigma^2 = D(X_1)$$

4. Pro pravděpodobnost vyhynutí v n -té generaci platí: $P(X_n = 0) = q_n = g_{X_n}(0)$

5. Pro limitní pravděpodobnost vyhynutí platí:

a) Je-li $\mu \leq 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$.

b) Je-li $\mu > 1$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \xi$, kde $\xi \in (0, 1)$ je nejmenší kladný kořen rovnice $z = g_X(z)$.

Příklad: Uvažme G – W proces, v němž $p_0 = \frac{1}{5}, p_1 = \frac{1}{5}, p_2 = \frac{3}{5}, p_k = 0, k = 3, 4, \dots$

- Vypočtete prvky matice přechodu \mathbf{P} pro $i = 0, 1, 2$ a $j = 0, 1, 2, 3, 4$.
- Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci počtu jedinců ve 2. generaci.
- Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce počtu jedinců ve 2. generaci vypočtete pravděpodobnostní funkci.
- Najděte střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců ve 2. generaci.
- Vypočtete limitní pravděpodobnost vyhynutí.

Výsledky:

Ad a)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{25} & \frac{2}{25} & \frac{7}{25} & \frac{6}{25} & \frac{9}{25} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{Ad b) } g_{X_2}(z) = \frac{33}{125} + \frac{11}{125}z + \frac{36}{125}z^2 + \frac{18}{125}z^3 + \frac{27}{125}z^4$$

$$\text{Ad c) } P(X_2 = 0) = \frac{33}{125}, P(X_2 = 1) = \frac{11}{125}, P(X_2 = 2) = \frac{36}{125}, P(X_2 = 3) = \frac{18}{125},$$

$$P(X_2 = 4) = \frac{27}{125}$$

$$\text{Ad d) } E(X_2) = \frac{49}{25} = 1,96, D(X_2) = \frac{1344}{625} = 2,15$$

$$\text{Ad e) Limitní pravděpodobnost vyhynutí je } \frac{1}{3}.$$