Cvičení 4

Přehled vzorců pro Poissonovo rozložení

Pravděpodobnostní funkce: $\pi(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ pro x = 0, 1, 2, …, = 0 jinak

Střední hodnota E(X) = λ, rozptyl D(X) = λ

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti λ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2},\ h = m + \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}$$

Příklad 1.: Při provozu balicího automatu vznikají během směny náhodné poruchy, které se řídí rozložením Po(2). Jaká je pravděpodobnost, že během směny dojde k aspoň jedné poruše?
[0,8647]

Příklad 2.: Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut ústředna zapojí a) právě jeden hovor, b) aspoň dva hovory?
[ad a) 0,368, ad b) 0,264]

Příklad 3.: Ze zkušenosti víme, že při správné obsluze stroje je v průměru 0,1% výrobků zmetkových. Ke stroji nastoupil nový pracovník. Za týden vyrobil 5 000 kusů, z nichž 11 bylo zmetkových. Lze takto vysoký počet zmetků vysvětlit působením náhodných vlivů?
[Nikoliv, pravděpodobnost, že při správné obsluze stroje se vyrobí aspoň 11 zmetků, je pouze 0,0137.]

Příklad 4.: Semena rostlin určitého druhu jsou znečištěna malým množstvím plevele. Je známo, že na jedné jednotce plochy vyrostou po osetí v průměru 4 rostliny plevele. Vypočítejte pravděpodobnost, že na dané jednotce plochy:
a) nebude žádný plevel,
b) vyrostou nejvýše 3 rostliny plevele,
c) vyroste aspoň 5, ale nejvýše 7 rostlin plevele.
[ad a) 0,0183, ad b) 0,4335, ad c) 0,32]

Příklad 5.: V prodejně posunuli zavírací dobu ve všední dny z 18 na 19 hodin. Sestrojte 90% asymptotický empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu zákazníků v této době, navštívilo-li prodejnu ve 30 náhodně zvolených dnech ve sledované době celkem 225 zákazníků. Přitom předpokládáme, že počet zákazníků v určitém časovém intervalu má Poissonovo rozložení.
[Střední hodnota počtu zákazníků se s pravděpodobností přibližně 90 % nachází v mezích od 6,68 do 8,32.]

Příklad 6.: Nechť X ~ Po(λ). Dokažte, že pro $\forall x = 1,2,3,\cdots$ platí: $x\pi(x) = \lambda\pi(x-1)$.
Pravděpodobnostní funkci Poissonova rozložení lze tedy vyjádřit rekurzívně:

$\pi(x) = \frac{\lambda}{x}\pi(x-1)$ pro x = 1, 2, 3, …, $\pi(0) = e^{-\lambda}$

Příklad 7.: Nechť X ~ Po(λ). Dokažte, že pro $\forall x = 0,1,2,\cdots$ platí: $\Phi(x) = \frac{\Gamma(x+1,\lambda)}{\Gamma(x+1)}$, kde

$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, $\Gamma(a,\lambda) = \int_\lambda^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$,

pro přirozené a: $\Gamma(a) = (a-1)!$, $\Gamma(a,\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^{a-1} + (a-1)e^{-\lambda}\lambda^{a-2} + \ldots + (a-1)!e^{-\lambda}$

Cvičení 4

Přehled vzorců pro Poissonovo rozložení

Pravděpodobnostní funkce: $\pi(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ pro x = 0, 1, 2, …, = 0 jinak

Střední hodnota E(X) = λ, rozptyl D(X) = λ

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti λ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2},\ h = m + \sqrt{\frac{m}{n}} u_{1-\alpha/2}$$

Příklad 1.: Při provozu balicího automatu vznikají během směny náhodné poruchy, které se řídí rozložením Po(2). Jaká je pravděpodobnost, že během směny dojde k aspoň jedné poruše?
[0,8647]

Příklad 2.: Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut ústředna zapojí a) právě jeden hovor, b) aspoň dva hovory?
[ad a) 0,368, ad b) 0,264]

Příklad 3.: Ze zkušenosti víme, že při správné obsluze stroje je v průměru 0,1% výrobků zmetkových. Ke stroji nastoupil nový pracovník. Za týden vyrobil 5 000 kusů, z nichž 11 bylo zmetkových. Lze takto vysoký počet zmetků vysvětlit působením náhodných vlivů?
[Nikoliv, pravděpodobnost, že při správné obsluze stroje se vyrobí aspoň 11 zmetků, je pouze 0,0137.]

Příklad 4.: Semena rostlin určitého druhu jsou znečištěna malým množstvím plevele. Je známo, že na jedné jednotce plochy vyrostou po osetí v průměru 4 rostliny plevele. Vypočítejte pravděpodobnost, že na dané jednotce plochy:
a) nebude žádný plevel,
b) vyrostou nejvýše 3 rostliny plevele,
c) vyroste aspoň 5, ale nejvýše 7 rostlin plevele.
[ad a) 0,0183, ad b) 0,4335, ad c) 0,32]

Příklad 5.: V prodejně posunuli zavírací dobu ve všední dny z 18 na 19 hodin. Sestrojte 90% asymptotický empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu zákazníků v této době, navštívilo-li prodejnu ve 30 náhodně zvolených dnech ve sledované době celkem 225 zákazníků. Přitom předpokládáme, že počet zákazníků v určitém časovém intervalu má Poissonovo rozložení.
[Střední hodnota počtu zákazníků se s pravděpodobností přibližně 90 % nachází v mezích od 6,68 do 8,32.]

Příklad 6.: Nechť X ~ Po(λ). Dokažte, že pro $\forall x = 1,2,3,\cdots$ platí: $x\pi(x) = \lambda\pi(x-1)$.
Pravděpodobnostní funkci Poissonova rozložení lze tedy vyjádřit rekurzívně:

$\pi(x) = \frac{\lambda}{x}\pi(x-1)$ pro x = 1, 2, 3, …, $\pi(0) = e^{-\lambda}$

Příklad 7.: Nechť X ~ Po(λ). Dokažte, že pro $\forall x = 0,1,2,\cdots$ platí: $\Phi(x) = \frac{\Gamma(x+1,\lambda)}{\Gamma(x+1)}$, kde

$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, $\Gamma(a,\lambda) = \int_\lambda^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$,

pro přirozené a: $\Gamma(a) = (a-1)!$, $\Gamma(a,\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^{a-1} + (a-1)e^{-\lambda}\lambda^{a-2} + \ldots + (a-1)!e^{-\lambda}$