Cvičení 7.: Systémy hromadné obsluhy s neomezenou kapacitou

1. Systém M/M/1/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen".

Podíl $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \rho^j(1-\rho)$, $j = 0, 1, \ldots$, tedy $N \sim Ge(1-\rho)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému: pravděpodobnost, že zákazník najde volnou linku $= 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě $= \frac{\lambda}{\mu}$, $E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$,

$E(N_Q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$, $E(N_S) = \frac{\lambda}{\mu}$, $E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda}$, $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$, $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$,

2. Systém M/M/1/∞/FIFO s netrpělivými zákazníky

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen". Přijde-li zákazník do systému, v němž je již n zákazníků, pak je ochoten čekat pouze s pravděpodobností b_n. Přitom $1 = b_0 \geq b_1 \geq \ldots \geq 0$.
Označme $c_0 = 1$, $c_j = b_1 b_2 \ldots b_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots$

Stacionární rozložení: $a_j = c_j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0, j = 1,2,\ldots,\; a_0 = \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

$E(N) = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j$, $E(W) = \frac{E(N)}{\lambda}$

Příklad 1.: K ortopedovi přichází v průměru 16 pacientů za 8 h jeho pracovní doby. Pacient je v průměru ošetřen za 20 min. Předpokládáme, že vstupní proud pacientů je Poissonův proces a doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, vypočtěte
a) využití ortopeda, b) pravděpodobnost, že pacient nebude čekat, c) střední hodnotu doby, kterou pacient stráví v systému, d) střední hodnotu počtu pacientů v systému.
Výsledky: Systém se může stabilizovat.

Ad a) Ortoped je využit na 66,6 %. Ad b) $a_0 = 1 - \rho = 0,\overline{3}$.

Ad c) $E(W) = 1$ h, $E(W_Q) = 40$ min, $E(W_S) = 20$ min

Ad d) $E(N) = 2$, $E(N_Q) = 1\frac{1}{3}$, $E(N_S) = \frac{2}{3}$

Příklad 2.: Do holičství přicházejí v průměru 3 zákazníci za 1 h a ostříhání jednoho zákazníka trvá v průměru 15 minut. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba ostříhání se řídí exponenciálním rozložením. Přicházející zákazník je ochoten čekat s pravděpodobností 0,8 jen tehdy, když je v holičství pouze jeden zákazník. Je-li jich více, odchází bez obsloužení. Zjistěte, zda se provoz v holičství může stabilizovat. Pokud ano, a) vypočtěte a interpretujte stacionární rozložení. b) Jaká je střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v holičství? c) Jak se změní tato střední hodnota, pokud by zákazník nesměl odejít bez obsloužení?