Cvičení 8.: Systémy hromadné obsluhy s omezenou kapacitou

1. Systém M/M/1/1
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je 1 (zákazník nemůže čekat ve frontě a je-li systém obsazený, odchází bez obsloužení).

Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:
Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut: $P_Z = a_1$.
Střední hodnota počtu přijatých zákazníků za jednotku času: $\lambda_P = \lambda a_0$.
Střední hodnota počtu odmítnutých zákazníků za jednotku času: $\lambda_Z = \lambda a_1$.

Využití systému: $\kappa = \rho a_0 = \frac{\lambda}{\mu} a_0$.

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = a_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = \frac{1}{\lambda+\mu}$.

Příklad 1.: Pracovnice v informačním středisku přijme v průměru jedno volání každých 12 minut. Hovor trvá v průměru 6 minut. Za předpokladu, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba trvání hovoru se řídí exponenciálním rozložením, najděte odpovědi na následující otázky:
a) Jaké procento volání bude odbaveno?
b) Kolik hovorů se uskuteční za 1 h?
c) Jaká je pravděpodobnost odmítnutí?

2. Systém M/M/n/m/FIFO
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je omezená (je rovna m) a frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n}$. Systém se může stabilizovat vždy.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\ldots,m \end{cases}$, kde $a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{m} \rho^j}$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut: $P_Z = \frac{n^n}{n!} \rho^m a_0$.

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě:

$$P_Q = \begin{cases} a_n \dfrac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ a_n (m-n) \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}.$$

Střední hodnota počtu přijatých zákazníků za jednotku času: $\lambda_P = \lambda(1-P_Z)$.
Střední hodnota počtu odmítnutých zákazníků za jednotku času: $\lambda_Z = \lambda P_Z$.
Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n)a_j$.
Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \beta(1-P_Z)$.
Využití systému: $\kappa = \rho(1-P_Z)$.
Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

Příklad 2.: V autoservisu jsou 3 mycí rampy a jeden pracovník, jemuž mytí auta trvá v průměru 12 min. Za 1 h přijedou průměrně 3 auta. Jsou-li však v okamžiku příjezdu auta všechny rampy obsazeny, auto nečeká a vrací se později.
a) Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu budou 0, 1, 2, 3 auta?
b) Vypočtěte střední hodnotu počtu zákazníků v autoservisu a ve frontě.
c) Vypočtěte střední hodnotu doby čekání ve frontě.
d) Jaká je pravděpodobnost, že bude volná aspoň jedna rampa?
e) Vypočtěte využití systému.
Návod na řešení pomocí MATLABu:
Použijeme funkci odmitani.m
lambda=3;mi=5;n=1;m=3;
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)

Příklad 3.: Čerpací stanice má jen jeden stojan určený na čerpání pohonných hmot pro kamióny. Prostor, na kterém je vybudována čerpací stanice, je velmi malý a pokud jeden kamión čerpá pohonné hmoty, pro druhý kamión není vyhrazen parkovací prostor, kde by mohl počkat, až se stojan uvolní. Kamióny přijíždějí k čerpací stanici v poissonovském vstupním proudu s intenzitou 4 kamióny za 1 h. Doba čerpání pohonných hmot se řídí exponenciálním rozložením a v průměru trvá 7 min 30 s (tj. 0,125 h). Průměrný zisk z obsluhy jednoho kamiónu je 81 Kč. Výše zisku je pro majitele čerpací stanice dostatečnou motivací pro to, aby se pokusil rozšířit parkovací prostor. Na základě jednání s majiteli pozemku v sousedství čerpací stanice zjistil, že týdenní poplatek za pozemek vyhrazený na čekání jednoho kamiónu činí 4590 Kč. Čerpací stanice je otevřená 100 h týdně. Zjistěte, zda je pro majitele čerpací stanice výhodné vybudovat čekací prostor pro kamióny. Pokud ano, tak pro kolik kamiónů.

3. Uzavřený systém M/M/n/m/FIFO

V systému je m zákazníků, přičemž mohou čekat v omezené frontě délky $m - n \geq 0$. Zákazníci po ukončení obsluhy opouštějí systém, ale později se do něj vracejí s novým požadavkem. Doba pobytu každého zákazníka mimo systém se řídí rozložením $Ex(\lambda)$, doba obsluhy každé linky se řídí rozložením $Ex(\mu)$.

Označme $\beta = \dfrac{\lambda}{\mu}, \rho = \dfrac{\beta}{n}$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \binom{m}{j}\beta^j a_0 \text{ pro } j = 1,2,\dots,n \\ \dfrac{n^n m!}{n!(m-j)!}\rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2,\dots,m \end{cases}$, kde $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{m} a_j$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = P(N \geq n) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} a_j$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = \sum_{j=0}^{m} j a_j$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \sum_{j=0}^{n-1} j a_j + n \sum_{j=n}^{m} a_j$.

Střední hodnota počtu zákazníků mimo systém: $E(N_R) = m - E(N)$.

Střední hodnota počtu zákazníků přicházejících za jednotku času (intenzita vstupního proudu): $\lambda_R = \lambda E(N_R)$.

Využití systému: $\kappa = \rho E(N_R)$.

Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

Příklad 4.: Skupinu pěti stejných strojů má na starosti jeden údržbář. Doba bezporuchového provozu stroje má exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/2 směny a doba opravy má rovněž exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/20 směny.

a) Jaká je pravděpodobnost, že všechny stroje pracují?

b) Jaká je pravděpodobnost, že budou současně vyřazeny aspoň dva stroje?

Návod na řešení pomocí MATLABu:

```
lambda=2;mi=20;n=1;m=5;
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)
```