10. Vytvořující funkce a jejich aplikace při analýze homogenních markovských řetězců

10.1. Motivace:

Při analýze homogenních markovských řetězců se často pracuje s mocninami přechodu, což je výpočetně náročné. Tomu se lze vyhnout, pokud použijeme vytvořující funkce. Postupujeme tak, že najdeme transformaci daného originálu, učiníme příslušnou operaci a provedeme zpětnou transformaci. Lze dokázat, že mezi originálem a jeho transformací existuje vzájemně jednoznačný vztah. Vytvořující funkce se též nazývají z-transformace a jsou diskrétní obdobou Laplaceovy transformace, která se často používá především v technických aplikacích.

10.2. Definice: Definice vytvořující funkce reálné posloupnosti

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže řada $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje v nějakém okolí 0, nazveme ji vytvořující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. (Obecněji lze vytvořující funkci zavést i pro posloupnost komplexních čísel, ale tímto případem se zabývat nebudeme.)

10.3. Příklad:

Najděte vytvořující funkce k posloupnostem:

a) $a_n = 1, n = 0, 1, \ldots$

b) $a_n = n, n = 0, 1, \ldots$

c) $a_n = x^n, n = 0, 1, \ldots$

d) $a_n = nx^n, n = 0, 1, \ldots$

Řešení:

ad a) $$G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$$

ad b) $$G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}, |z| < 1$$

ad c) $$G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (xz)^n = \frac{1}{1-xz}, |z| < \frac{1}{|x|}$$

ad d) $$G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(xz)^n = |\text{substituce } t = xz| = t\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = t\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} t^n =$$
$$= t\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t} = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{xz}{(1-xz)^2}, |z| < \frac{1}{|x|}$$

Výsledky uspořádáme do přehledné tabulky:

a_n	$G_a(z)$
1	$1/(1-z)$
n	$z/(1-z)^2$
x^n	$1/(1-xz)$
nx^n	$xz/(1-xz)^2$

10.4. Věta:

Nechť $G_a(z)$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Pak pro n = 0, 1, 2, ... platí: $a_n = \left.\frac{G_a^{(n)}(z)}{n!}\right|_{z=0}$.

Důkaz:

Řadu $G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ budeme derivovat člen po členu a vyjádříme hodnotu této derivace v bodě z = 0. Přitom užijeme konvenci $0^0 = 1$.

$n = 0$: $G_a(0) = a_0$

$n = 1$: $\frac{d}{dz} G_a(z) = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \frac{d}{dz} G_a(0) = a_1$

$n = 2$: $\frac{d^2}{dz^2} G_a(z) = \frac{d^2}{dz^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2}, \frac{d^2}{dz^2} G_a(0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow a_2 = \frac{G_a^{(2)}(0)}{2!}$

$n = 3$: $\frac{d^3}{dz^3} G_a(z) = \frac{d^3}{dz^3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=3}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2) z^{n-3}, \frac{d^3}{dz^3} G_a(0) = a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow a_3 = \frac{G_a^{(3)}(0)}{3!}$

atd.

10.5. Příklad:

Je dána vytvořující funkce $G_a(z) = e^z$. Najděte odpovídající posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešení:

$a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3!}, \ldots$, tedy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

10.6. Definice: Definice konvoluce a konvoluční mocniny

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti. Jejich konvolucí rozumíme posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

Zkráceně píšeme $\{c\} = \{a\}*\{b\}$.

Konvoluci $\{a\}*\{a\}$ nazýváme druhou konvoluční mocninou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme ji $\{a\}^{2*}$.

Obecně k-tá konvoluční mocnina posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je $\{a\}^{k*} = \{a\}* \dots *\{a\}$.

10.7. Věta: Věta o vytvořující funkci konvoluce

Jestliže posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $G_a(z)$ a posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $G_b(z)$, pak posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, která je konvolucí daných dvou posloupností, má vytvořující funkci $G_c(z) = G_a(z).G_b(z)$. k-tá konvoluční mocnina $\{a\}^{k*}$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ má vytvořující funkci $G_a(z)^k$.

Důkaz:

Součin $G_a(z).G_b(z)$ dostaneme vynásobením mocninných řad.

Koeficient u z^n je v tomto součinu roven $a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

10.8. Definice: Definice vytvořující funkce posloupnosti vektorů či posloupnosti matic

a) Nechť I je nejvýše spočetná indexová množina. Uvažme posloupnost vektorů $\mathbf{a}_0 = (a_{0i})_{i\in I}$, $\mathbf{a}_1 = (a_{1i})_{i\in I}$, ...

Vytvořující funkce posloupnosti vektorů $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definována vztahem: $G_{\mathbf{a}}(z) = (G_{ai}(z))_{i\in I}$, kde $G_{ai}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{ni} z^n$.

Zkráceně píšeme: $G_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

b) Nechť I, J jsou nejvýše spočetná indexové množiny. Uvažme posloupnost matic$\mathbf{A}_0 = (a_{0ij})_{i\in I, j\in J}$, $\mathbf{A}_1 = (a_{1ij})_{i\in I, j\in J}$, ...

Vytvořující funkce posloupnosti matic $\{\mathbf{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definována vztahem: $G_{\mathbf{A}}(z) = (G_{aij}(z))_{i\in I, j\in J}$, kde $G_{aij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nij} z^n$.

Zkráceně píšeme:

$G_{\mathbf{A}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n z^n$.

(Vytvořující funkce posloupnosti vektorů či posloupnosti matic vznikne tak, že získáme vytvořující funkce posloupnosti odpovídajících složek a vzniklé vytvořující funkce uspořádáme do vektoru či do matice.)